СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ по ИНФОРМАТИКА и МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ при ВАК

Славчо Владимиров Щраков

Отделимост в алгебри от функции, термове и автомати с дървета

Автореферат

на дисертационен труд за присъждане на научна степен:

ДОКТОР НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ

Научна специалност - 01.01.12 ИНФОРМАТИКА

София, 2007

СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ по ИНФОРМАТИКА и МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ при ВАК

Славчо Владимиров Щраков

Отделимост в алгебри от функции, термове и автомати с дървета

А в т о р е ф е р а т

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД ЗА ПРИСЪЖДАНЕ НА НАУЧНА СТЕПЕН:

ДОКТОР НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ

Рецензенти:

Акад. дтн Иван П. Попчев — Чл. кор. дмн Стефан Додунеков

________________ ________________

Ст.н.с. II ст. дмн Петър Бойваленков

____

София, 2007

Дисертационният труд е обсъден и допуснат до защита на разширено заседание на катедра "Информатика" на Природо-математическия факултет на Югозападния Университет "Неофит Рилски", състояло се на 14.05.2007 година.

Дисертационният труд съдържа 244 страници. Библиографията включва 123 заглавия и 18 участия в международни научни конференции, от които 12 в чужбина.

Приложен е списък на фигурите (общо 35 в дисертационния труд), списък на таблиците (4 на брой), авторска справка и предметен указател с повече от 200 понятия, разглеждани в работата.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на **17.12.2007 година от 16.00 часа в Мултимедийната зала на ИНСТИТУТА по МАТЕМАТИКА и ИНФОРМАТИКА на БАН,** на открито заседание на СПЕЦИАЛИЗИРАНИЯ НАУЧЕН СЪВЕТ по ИНФОРМАТИКА и МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ при ВАК.

Материалите по защитата на дисертационния труд са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИНСТИТУТА по МАТЕМАТИКА и ИНФОРМАТИКА на БАН, гр. СОФИЯ, ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 8, 1113.

Автор: Славчо Владимиров Щраков

Заглавие: *Отделимост в алгебри от функции, термове и автомати с дървета.*

Увод

Основната научна цел на настоящата дисертацията е: *По- нататъшно изучаване на съществените променливи, подтермове и позиции и отделимите множества за дискретни (предимно крайни) функции, термове и автомати за тяхното ефективно (а понякога и ефектно) приложение в теоретичните и приложните компютърни науки.*

За реализацията на тази цел сме си поставили **три основни задачи:**

1. Усилване и обобщаване на резултатите за същественост и отделимост в алгебри от дискретни функции, постигнати в предишната дисертация на автора или доказани от други автори.

2. Обобщаване на тази теория за универсалните алгебри, т.е. разглеждане и изучаване на отделимост и същественост за термове. Достигане на нови резултати, по възможност значими и за самата теория на универсалните алгебри, и ориентирани към приложение в компютърните науки.

3. Приложение на достигнатите резултати за отделимост и същественост при алгебри от дискретни функции и универсални алгебри в теоретичната и приложна информатика.

На решаването на всяка една от тези задачи е посветена по една част от дисертацията.

Спомагателни задачи за постигане на основната цел бяха организирането на серията от международни конференции по Дискретна математика и приложения (ICDMA) и издаването на научни сборници посветени на тази тематика.

Досега са проведени 7 конференции от серията ICDMA. Тези конференции стартираха през 1988 година и се превърнаха в един много авторитетен международен форум за представяне на сериозни научни резултати в областта на Дискретната математика и нейните приложения.

Относно публикуването на получените резултати бяха издадени няколко специални издания на Годишника на университета, посветени на Дискретната математика. На тези издания аз бях отговорен редактор и съставител.

Глава 1. Отделимост за дискретни функции

1.1 Отделими и доминиращи множества

Основно за тази глава е понятието за съществена променлива на дадена дискретна функция, което се обобщава с понятието за отделимо множество от променливи. Особено интензивно се изучават свойствата на съществените променливи с възникването на разнообразните приложения на дискретните функции в теоретичните основи на информатиката, при по-задълбоченото изучаване на функциите от алгебрата на логиката в контекста на синтеза и анализа на функционални и превключвателни схеми. Такива схеми са в основата на съвременните абстрактни устройства, с които се моделират процесите и техническите реализации в компютърните науки.

Първите резултати върху съществените променливи са публикувани от О. Лупанов (1962) [5], Н. Соловьов (1963) [12] , A. Salomaa (1963), R. Davies (1966) [56], Ю. Брейтбарт (1967) [1], К. Чимев (1968) [17] и др.

Определение 1.1.2[17] Казваме, че функцията $f(x_1,\dots,x_n) : A^n \to A$ *зависи съществено от* x_i *(*x_i *е съществена за* f*)* $1 \le i \le n$, ако съществуват две $n-$торки

$(a_1,\dots,a_{i-1},a,a_{i+1},\dots,a_n)$ и $(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n)$,
такива че$f(a_1,\dots,a_{i-1},a,a_{i+1},\dots,a_n) \ne f(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n)$.

Множеството от всички съществени променливи за една функция f, се означава с $Ess(f)$, а множеството на фиктивните с $Fic(f)$.

Определение 1.1.3 Нека $M := \{x_{i_1},\dots,x_{i_m}\} \subseteq X_n$ е множество от променливи за функцията $f(x_1,\dots,x_n)$ и нека $C_M := (c_{i_1},\dots,c_{i_m}) \in A^m$ е една наредена $m-$торка (вектор) от константи за променливи на M. Чрез M и C_M, по естествен начин се дефинира една нова функция $f_1 : A^{n-m} \to A$, определена с равенството

$$f_1(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m}}) := f(x_{i_1} = c_{i_1}, \ldots, x_{i_m} = c_{i_m}).$$

Функцията f_1 се получава от f, като се заместят променливите на M със съответните константи от C_M, навсякъде където се появяват във f. Тя се нарича *подфункция на f, върху (относно) M и C_M* и се означава с $f_1 \prec^{M,C_M} f$, а когато множествата M и C_M се подразбират ще пишем $f_1 \prec f$. Ще използуваме и означението $f_1 = f(M = C_M)$.

Определение 1.1.4 Нека M и N са две непразни множества от съществени променливи за функцията f такива, че $M \cap N = \emptyset$. Казваме, че M е:

(i)[17] *отделимо за f относно N,* ако съществува вектор от константи C_N в A такива, че след като се заместят с тях променливите на N, получената подфункция g на f ($g \prec^{N,C_N} f$), зависи съществено от всички променливи на M т.е. $M \subseteq Ess(g)$. Със $Sep(f, N)$ ще означаваме множеството от всички отделими множества за функцията f относно N.

(ii)[17] *отделимо за f,* ако M е отделимо за f относно множеството $Ess(f) \setminus M$; Със $Sep(f)$ ще означаваме множеството от всички отделими множества за функцията f.

(iii)[24] *доминиращо над N за f,* ако съществува вектор C_M от константи в A така, че след заместването на променливите от M с тях, получената подфункция g, $g \prec^{N,C_M} f$ на f, не зависи съществено от всички променливи на N т.е. $N \cap Ess(g) = \emptyset$ и множеството M е минимално (относно включването) с това свойство. С $Dom(N, f)$ ще означаваме множеството от всички доминиращи над N за функцията f множества.

(iv)[24] *дистрибутивно (дистрибутор) на N за f,* ако за всеки вектор C_M от константи в A след заместването на променливите от M с тях, получените подфункции g на f, за които $g \prec^{N,C_M} f$, не зависят съществено поне от една променлива на N т.е. $N \not\subseteq Ess(g)$ и множеството M е минимално (относно включването) с това свойство. С $Dis(N, f)$ ще означаваме множеството от всички дистрибутивни множества на N за f.

(v) *свободно за f относно N,* ако за всеки вектор C_N от константи в A, след като заместим с тях променливите на N, получените подфункции g на f, за които $g \prec^{N,C_N} f$, зависят съществено от всички променливи на M т.е. $M \subset Ess(g)$; С $Fre(f, N)$ ще означаваме множеството от всички свободни множества за функцията f относно N.

(vi) *свободно за f,* ако M е свободно за f относно множеството $Ess(f) \setminus M$; С $Fre(f)$ ще означаваме множеството от всички свободни множества за функцията f.

Свободните и дистрибутивните множества са въведени от автора, за първи път в [24] и [133].Първите резултати за свободните, доминиращите, дистрибутивните и елиминиращите множества са получени от автора в [24], [133] и [131], докато основните свойства на съществените променливи и отделимите множества от променливи са изучени в [1, 5, 12, 17, 46, 47, 56].

Броят на различните подфункции, които има една функция е една много важна мярка за сложността на тази функция. Важността й проличава особено вконтекста на анализа и синтеза (виж [8]) на логическите, функционалните и превключвателните схеми. Практически, по-важни са онези функции, които имат повече неотделими множества, тъй като такива функции могат да се смятат и "по-прости" т.е. с по-малко подфункции.

Отделимите множества играят важна роля и при пресмятането на стойностите на самите функции, с различни устройства, като например с така наречените диаграми за решаване [5], с автомати и др.

Много подробно изучаване и систематизиране на резултатите за съществените, силно съществените и $c-$силно съществените променливите е направено в [17, 46, 47]. В тези и някои други работи на К. Чимев започва изследването на отделимите множества. Някои от свойствата на отделимите множества от променливи са обект на изучаване в работите на групата (школата) от математици в Югозападния университет, Благоевград - К. Чимев, Сл. Щраков, И. Гюдженов, М. Аслански, И.

Мирчев и др. [17, 24, 131, 133]. Тъй като, в тази и близки до нея области, има много отворени и нерешени проблеми и в момента те са изследователска цел на математици и информатици от следващата "вълна" в школата на проф. К. Чимев - Д. Ковачев, И. Атанасова, И. Дамянов и др.

С въвеждането на понятията за свързани множества (по отделимост и по същественост) в [136] са обобщени следните, важни за теорията, теореми:

Теорема 1.1.9[133] Ако $M \in Dom(N, f)$, то:

(i) за всяко $x_i \in M$ съществува $x_j \in N$, така че $\{x_i, x_j\} \in Sep(f)$;

(ii) за всяко $x_j \in N$ съществува $x_i \in M$, така че $\{x_i, x_j\} \in Sep(f)$.

Теорема 1.1.11[133] Ако M и N са взаимно доминиращи се множества за функцията f и $P \subset Ess(f)$ е множество, което няма общи елементи с M и N, то

$$P \in Dom(M, f) \iff P \in Dom(N, f).$$

Теорема 1.1.12[133] Ако променливите (множествата) $\{x_i\}$ и $\{x_j\}$ са взаимно доминиращи се за функцията f и $x_k \in Ess(f)$, то

$$\{x_i, x_k\} \in Sep(f) \iff \{x_j, x_k\} \in Sep(f).$$

Доказани са и някои нови твърдения, като:

Теорема 1.1.20 Ако M и N са свързани по отделимост, непразни множества от променливи за функцията f , то $M \cup N \in Sep(f)$.

Теорема 1.1.21 [136] Ако M и N са свързани по отделимост, непразни множества от променливи за функцията f и L е множеството, за което $L \subset Ess(f) \setminus (M \cup N)$, като C_L е произволен вектор от константи за променливите на L, а $f_1 = f(L = C_L)$, то

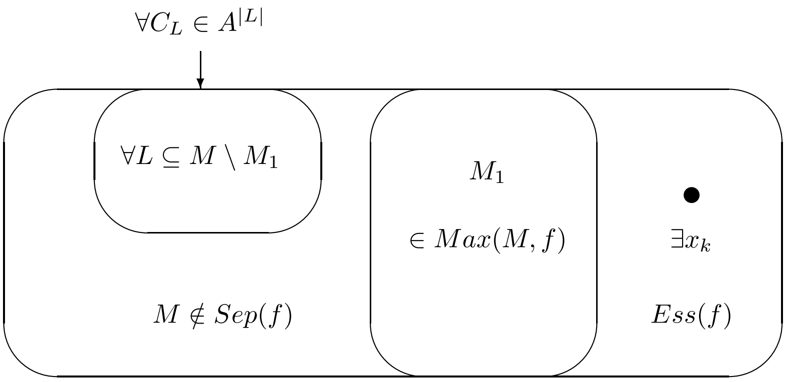
$$M \in Sep(f_1) \quad \iff \quad N \in Sep(f_1).$$

С $Max(M, f)$ означаваме фамилията (множеството) от максимално отделимите подмножества на M за f. Първите резултати, които характеризират множеството $Max(M, f)$ са получени от К.Чимев [46] и автора [133]. В тази част е усилена една много важна теорема за изясняването на редица структурни свойства на дискретните функции, доказана от К. Чимев [46].

Теорема[46]1.1.24 Ако $M_1 \in Max(M, f)$, то за всеки набор от променливи $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, $t \leq |M \setminus M_1|$ и за всвки набор от константи $c_{i_1}, \ldots, c_{i_t}$ съществува поне една променлива x в множеството $Ess(f) \setminus M$ която е съществена за подфункцията $f(x_{i_1} = c_{i_1}, \ldots, x_{i_t} = c_{i_t})$ и M_1 е отделимо за тази подфункция.

Този резултат е усилен в [29], като е доказано, че променливата x от множеството $Ess(f) \setminus M$ може да се избере преди избора на променливите $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ и константите $c_{i_1}, \ldots, c_{i_t}$.

Теорема 1.1.25[29, 133] Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, за която $|Ess(f)| \geq 3$ и $M \notin Sep(f)$, $M \subset Ess(f)$ и $|M| \geq 2$. Ако $M_1 \in Max(M, f)$, то съществува променлива $x_k \in Ess(f) \setminus M$ такава, че за всяко подмножество L на $M \setminus M_1$ и за всеки вектор C_L от константи за променливите на L, функцията $f(L = C_L)$ зависи съществено от x_k и $M_1 \cup \{x_k\}$ е отделимо за нея.



Фигура 1.15: Илюстрация към Теорема 1.1.25

Определение 1.1.11[133, 137] Нека $F = \{P_1, \ldots, P_v\}$ е произволна фамилия от непразни множества. Ще казваме, че множеството $\beta = \{x_1, \ldots, x_t\}$ е *s-система* на F, ако за всяко $P_i \in F$, $1 \leq i \leq v$ съществува $x_j \in \beta$ така, че $x_j \in \beta \cap P_i$ и за всяко $x_k \in \beta$ съществува $P_l \in F$ така, че

$\{x_k\} = P_l \cap \beta$.

Изучаването на s-системите на фамилиите от дистрибутивни множества (Определение 1.1.4(vi)) на дадено неотделимо множество от променливи се оказват един важен пункт от изследването на максималните отделими подмножества на това множество([133] и [27]). Дадено е още едно ново доказателство на следната теорема

Теорема 1.1.26[133, 137] За всяка фамилия от непразни множества, съществува поне една нейна $s-$система.

Достигнати са и някои нови резултати, касаещи Шпернеровите фамилии от множества, които намират широко приложение в системите за управление на бази от данни.

За по-задълбочено изучаване, най-вече на максималните отделими подмножества въвеждаме някои допълнителни понятия, като носител и атом на множества от променливи. Връзката на тези понятия с някои екстремални множества от променливи се установява, чрез серия от теореми, в които се разкриват и някои нови свойства на отделимите множества. По-голямата част от резултатите тук са публикувани в [125].

Специално внимание сме отделили на свойствата на "свободните" променливите, които сами представляват свободни множества. Това всъщност са "променливите" с максимална сложност за дадена функция. Намерени са достатъчни условия, кога една променлива е от множеството $Sfr(f)$ т.е. кога една променлива остава съществена при всеки вектор от константи за останалите променливи. В Теорема 1.1.37 е показано, че всяко неотделимо множество "генерира" поне по една такава променлива. От друга страна знаем, че наличието на повече неотделими множества за дадена функция е мярка за нейната по-ниска сложност, т.е. по-малко са нейните подфункции. На пръв поглед това е противоречие, но то само показва, че опростяването на функциите не е еднопосочен процес. Следствията на тази теорема показват, че и доминиращите множества оказват влияние за появата на "свободни" променливи. В тази посока е и резултатът, получен в Теорема 1.1.38.

Глава 2. Отделимост в универсални алгебри

Тази глава се състои от четири параграфа, посветени на изучаване на свойствата на променливите, подфункциите, подтермовете и множествата от променливите на термовете в универсалните алгебри, като едно естествено продължение на резултатите от първата глава.

2.1 Съществени променливи в универсални алгебри

Повечето от основните понятия и резултати от класическата теория на универсалните алгебри, които служат за въвеждане в тази материя са заимствувани от прекрасната книга *A Course in Universal Algebra* от S. Burris и H. P. Sankappanavar [43].

Определение 2.1.1 Нека $\mathcal{F}$ е крайно множество, елементите на което се наричат *операционни символи.* Нека $\tau : \mathcal{F} \to I\!N$ е изображение в множеството на неотрицателните цели числа, като за $f \in \mathcal{F}$ с $\tau(f)$ се означава членността (arity) на операционния символ f. Двойката $(\mathcal{F}, \tau)$ се нарича *тип (подобие, сигнатура)* или накратко само тип. Множеството от операционни символи от членност p ще означаваме с $\mathcal{F}_p$.

Една сигнатура τ ще считаме за тривиална, ако $\mathcal{F} = \emptyset$. По-нататък, ще разглеждаме само не тривиални сигнатури.

Определение 2.1.3[43] Под *алгебра* $\mathcal{A}$ от тип τ ще разбираме наредената двойка $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$, където A е непразно множество, наречено *универсум* на $\mathcal{A}$. Множеството $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} := \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ се състои от крайни операции на A, като на всеки $n-$членен операционен символ f във $\mathcal{F}$, се съпоставя по една $n-$членна операция $f^{\mathcal{A}}$.

С $\mathcal{A}lg(\tau)$ ще означаваме класа на всички алгебри от тип τ.

Нека $X = \{x_1, x_2 \ldots, \}$ е множество от различни елементи наречени *променливи* и нека $X_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Множеството $W_\tau(X)$ от всички термове от тип τ се определя като минималното множество за което:

(i) $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq W_\tau(X)$;

(ii) Ако $t_1, \cdots, t_n \in W_\tau(X)$, то $f(t_1, \cdots, t_n) \in W_\tau(X)$ (Определение 2.1.8).

Термовете се наричат още *дървета,* тъй като на всеки терм еднозначно може да се съпостави едно дърво и обратно.

Дърветата имат много и разнообразни приложения в компютърните науки, в логиката и други области.

За всички приложения на термовете е много важно да се измери по подходящ начин тяхната сложност. Понятието за дълбочина на един терм (или за височината на едно дърво) е добре известна мярка за сложност. Методът на алгебричната индукция, който е често използувано и е мощно средство за доказване, се прилага върху различните нива, на които се "разслояват" термовете от тяхната дълбочина.

С $Depth(t)$, $\|t\|$ и $Sub(t)$ се означават съответно дълбочината, размерът (броят на операционните символи) и множеството от подтермовете на даден терм t.

Да означим с $maxar = \max\{\tau(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ и нека $\mathbb{N}_{\mathcal{F}} := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq maxar\}$.

Нека $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}^*$ е множеството от всички крайни стрингове (думи) над $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}$. Множеството $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}^*$ е естествено подредено, посредством наредбата $p \preceq q \iff p$ е прфикс (начало) на q. С гръцката буква ε, както обикновено, ще означаваме празната дума (стринг) над $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}$. Ще пишем още $p \prec q$ ако $p \preceq q$ и $p \neq q$.

Определение 2.1.12[147, 148] *Множеството от позиции* $Pos(t)$ *на даден терм* се въвежда индуктивно, като множество от стрингове над $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}$.

(i) $Pos(t) = \{\varepsilon\}$, ако $t \in X \cup \mathcal{F}_0$;

(ii) $Pos(t) := \{\varepsilon\} \bigcup_{1 \leq i \leq n} (i \circ Pos(t_i))$, ако $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $n \geq 0$, където $i \circ Pos(t_i) := \{i \circ q | q \in Pos(t_i)\}$, и $\circ$ означава операцията конкатенация в множеството $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}^*$.

Нека $sub_t : Pos(t) \to Sub(t)$ е функция, която съпоставя на всяка позиция p в t, подтерма на t, чийто корен се намира в позицията p.

Определение 2.1.13[58] Едно *тъждество* от тип τ е израз от вида $t \approx s$, където $t, s \in W_\tau(X)$. Ако $t^{\mathcal{A}} = s^{\mathcal{A}}$ ще казваме, че алгебрата $\mathcal{A}$ удовлетворява тъждеството $t \approx s$ и ще пишем $\mathcal{A} \models s \approx t$. Множеството от всички тъждества от тип τ се означава с $Id(\tau)$.

Определение 2.1.14[43] Нека $\Sigma \subset Id(\tau)$ е едно множество от тъждества и $\mathcal{A}$ е алгебра от тип τ. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ *"удовлетворява"* Σ (*и ще пишем* $\mathcal{A} \models \Sigma$), ако $\mathcal{A} \models t \approx s$ за всяко $t \approx s \in \Sigma$ и също така ще казваме, че Σ *"поражда"* тъждеството $t \approx s$ (*и ще пишем* $\Sigma \models t \approx s$) ако за всяка алгебра $\mathcal{A} \in \mathcal{A}lg(\tau)$ от $\mathcal{A} \models \Sigma$ следва, че $\mathcal{A} \models t \approx s$.

Нека Σ е множество от тъждества от тип τ. *Множеството от модели* на Σ се определя по следния начин:

$$Mod\Sigma := \{\mathcal{A} \in \mathcal{A}lg(\tau) \mid \mathcal{A} \models t \approx s, \text{ за всяко тъждество } t \approx s \in \Sigma\}.$$

Нека $\mathcal{R}$ е един клас от алгебри от даден тип. Множеството от тъждества, които се удовлетворяват в $\mathcal{R}$ се дефинира, както следва:

$$Id\mathcal{R} := \{t \approx s \in Id(\tau) \mid \mathcal{A} \models t \approx s, \text{ за всяка алгебра } \mathcal{A} \in \mathcal{R}\}.$$

Операторите Id и Mod образуват връзка (отношение) на Галоа, като неподвижните точки на оператори

$$IdMod : \mathcal{P}(Id(\tau)) \to \mathcal{P}(Id(\tau)) \text{ и}$$
$$ModId : \mathcal{P}(\mathcal{A}lg(\tau)) \to \mathcal{P}(\mathcal{A}lg(\tau))$$

образуват пълните решетки

$$\mathcal{L}(\tau) := \{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}lg(\tau) \text{ и } ModId\mathcal{R} = \mathcal{R}\} \text{ и}$$
$$\mathcal{E}(\tau) := \{\Sigma \mid \Sigma \subseteq Id(\tau) \text{ и } IdMod\Sigma = \Sigma\}$$

от всички многообразия от тип τ и от всичките теории от тип τ. Тези решетки са дуално изоморфни. Съгласно теоремата на Биркхоф (Birkhoff) [43], затворените елементи при тези оператори са класовете, определени с тъждества (*многообразията от тип* τ) и *теориите от тип* τ.

Да отбележим, че терм-операциите ще играят ключова роля при изучаването на същественост на променливи и отделимост на множества. Всъщност операциите имат такава роля и при изучаване на свойствата на тъждествата и многообразията.

Определение 2.1.15[144] Нека $t \in W_\tau(X_n)$ е един n-членен терм от тип τ и нека $\mathcal{A}$ е алгебра от тип τ. Тогава променливата x_i, $1 \leq i \leq n$, се нарича *съществена за t, относно алгебрата $\mathcal{A}$*, ако терм-операцията $t^{\mathcal{A}} : A^n \to A$, породена от t върху алгебрата $\mathcal{A}$, зависи съществено от своята i-та променлива x_i. С $Ess(t, \mathcal{A})$ ние ще означаваме множеството от всички променливи, които са съществени за t, относно алгебрата $\mathcal{A}$.

Следващата теорема характеризира съществените променливи, относно дадена алгебра $\mathcal{A}$.

Теорема 2.1.1 [144] Една променлива $x_i \in X_n$ е съществена за n-членния терм t (от тип τ) относно дадена алгебра $\mathcal{A}$ от тип τ, точно тогава, когато $\mathcal{A} \not\models t \approx \overline{h}(t)$, където $h : X_n \to W_\tau(X_{n+1})$ е едно изображение дефинирано, чрез

$$h(x_i) = x_{n+1} \quad \text{и} \quad h(x_j) = x_j \quad \text{за всяко} \quad j \neq i,\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

където $\overline{h}$ е "естественото" разширение (оценка) на h, т.е., $\overline{h} : W_\tau(X_n) \to W_\tau(X_{n+1})$.

Променливите, които са съществени за терма $t \in W_\tau(X_n)$, относно една алгебра $\mathcal{A} \in \mathcal{A}lg(\tau)$, могат също да бъдат характеризирани и с *оценъчни изображения.*

Да отбележим, че подтермовете-операции силно зависят от алгебрата $\mathcal{A}$, докато подтермовете от множеството $Sub(t)$, се дефинират индуктивно и не зависят по никакъв начин, от която и да било алгебра, а само от $\mathcal{F}$ и X.

Едно множество $M = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\} \subseteq X_n$ от съществени променливи на терма t, относно алгебрата $\mathcal{A}$ е отделимо за терма t, относно $\mathcal{A}$, точно тогава, когато M е отделимо за t, относно всяка свободна алгебра във $V(\mathcal{A})$ с поне $n+1$ свободни пораждащи елементи.

Съществуват различни начини за дефиниране на *сложност* на термове. По-точно, съществуват два класа от мерки за сложности на термове. Най-общо мерките за сложност ще определяме, като функции от $W_\tau(X)$ в $\mathbb{N}$. При мерките от първият клас се използва лингвистичния подход, при който се преброяват променливите и операционните символи, които се появяват в съответния терм и те задават птрвите две мерки за сложност на термовете.

Вторият клас от мерки за сложност, се основава върху идеята, един терм да се разглежда, като дума от даден език, заедно с нейното "значение" в дадена алгебра, т.е. когато се подходи семантично.

Определение 2.1.20[144] Нека $t \in W_\tau(X_n)$ е един терм и нека $\emptyset \neq M \subseteq X_n$ е едно непразно подмножество от променливи. Броят $Comp^{(3)}(t, M, \mathcal{A})$ от всички оценки h на $X_n \setminus M$ с $C \in \overline{A}^{n-|M|}$, $|A| = |\overline{A}|$, за които $M = Ess(\overline{h}(t), \mathcal{A})$ се нарича *сложност на t относно M в $\mathcal{A}$.* Тогава за сложност на t, относно алгебрата $\mathcal{A}$ се взема числото

$$Comp^{(3)}(t, \mathcal{A}) := \sum_{\emptyset \subset M \subseteq X_n} Comp^{(3)}(t, M, \mathcal{A}).$$

Мярката за сложност $Comp^{(3)}$ се различава от първите две сложности, като отчита и структурата на самите термове. За нея е в сила следната

Лема 2.1.1 [144] Ако $\mathcal{A} \models t \approx t'$, то за всяко $\emptyset \subset M \subseteq X_n$ ще имаме $Comp^{(3)}(t, M, \mathcal{A}) = Comp^{(3)}(t', M, \mathcal{A})$ и така също $Comp^{(3)}(t, \mathcal{A}) = Comp^{(3)}(t', \mathcal{A})$.

Очевидно за двете "лингвистични" мерки за сложност тази лема не е в сила.

Разработен е алгоритъм (с метода на пълното изчерпване), чрез който е направен каталог на първичната двуелементна алгебра. Алгоритъмът е представен, чрез процедура описана на един PASCAL-оподобен метаезик, което е утвърдена практика за подобни презентации.

2.2 Композиции на термове

Композициите и хиперсубституциите на термовете са едни от основните инструменти за получаване на нови тъждества при изучаването на решетката на многообразията от даден тип и нейната дуална решетка на теориите (логиките) от тъждества (equational logic, equational theoty). [43, 58, 76] и др.

Това са два вида изображения, като първите се получават при различните заместванния на променливи и подтермове на даден терм с нови термове, докато вторите са резултат от заместване на операционни символи в даден терм с нови термове.

Чрез композицията на термовете се дефинират редица обекти, както в универсалните алгебри, а така също и в теория на функциите, геометрията, алгебрата, като особено важни са приложенията в компютърните науки. Почти винаги композициите се дефинират, като заместване на дадена променлива с някои външен терм, навсякъде където се среща тази променлива в изходния терм. Такава композиция може да се дефинира по индуктивен начин и ние тук я наричаме *индуктивна.* Оказва се, че при разглеждането на оцветени термове и за дефинирането на мулти-хиперсубституции, се нуждаем от композиции, които допускат по-свободно тълкуване на съответните замествания, които ще наричаме *позиционни.*

Операцията "композиция" на термове е една аналогия на операцията "конкатенация" в множеството от думи над дадена азбука. Тази аналогия ни позволява да търсим обобщение на това понятие в няколко направления.

Определение 2.2.2 Нека $r, s, t \in W_\tau(X)$. С $t(r \leftarrow s)$ ще означаваме терма, получен от едновременното заместване на r със s навсякъде, където r се появява в t, като негов подтерм. Такъв терм ще наричаме *композиция (суперпозиция)* на термовете t и s, чрез r т.е.

(i) $t(r \leftarrow s) := t$ ако $r \notin Sub(t)$;

(ii) $t(r \leftarrow s) := s$ ако $t = r$ и

(iii) $t(r \leftarrow s) := f(t_1(r \leftarrow s), \ldots, t_n(r \leftarrow s))$, ако $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $r \in Sub(t)$ и $r \neq t$.

По естествен начин сега се подразбира обозначението $t(r_1 \leftarrow s_1, \ldots, r_m \leftarrow s_m) = t(\{r_i \leftarrow s_i\}_{i=1}^m)$.

Индуктивната композиция е "общо приета", в смисъл, че когато говорим за композиция, почти винаги подразбираме индуктивна композиция върху променливи, т.е. когато $r_i \in X$.

Определение 2.2.9 Нека t и $r \in W_\tau(X)$ са два терма от тип τ и $p \in Pos(t)$ е една позиция в t. *Композиционният терм* $s := t(p; r)$, се получава от t след заместването (само в позицията p) на подтерма $sub_t(p)$ с терма r.

Позиционната композиция $t(p_1, \ldots, p_m; t_1, \ldots, t_m)$ се подразбира по естествен начин и за краткост се означава с $t(p_1, \ldots, p_m; t_1, \ldots, t_m) := t(S; T)$, където $S = \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ и $T = \langle t_1, \ldots, t_m \rangle$.

Теорема 2.2.1 Ако $t, s, r \in W_\tau(X)$, $p \in Pos(t)$ и $q \in Pos(s)$, то $t(p; s(q; r)) = t(p; s)(pq; r)$.

Индуктивната и позиционната композиции дават възможност да получим някои нови затварящи оператори в множеството от всички тъждества от даден тип и в множеството от алгебрите от този тип.

Ще стартираме с някои базови дефиниции, дадени в класическата в тази област, книга [43] и в статията [144].

В прекрасната книга [43], дедуктивна обвивка на произволно множество от тъждества се дефинира по следния начин.

Определение 2.2.12[43] Едно множество Σ от тъждества от тип τ е $D-$дедуктивно затворено, ако за него са в сила следните аксиоми (правила за дедукция, продукции):

D_1 (рефлексивност), D_2 (симетричност), D_3 (транзитивност),

D_4 (индуктивна субституция)

$(t \approx s \in \Sigma \ \& \ r \in W_\tau(X) \ \& \ x \in var(t)) \implies t(x \leftarrow r) \approx s(x \leftarrow r) \in \Sigma;$

D_5 (позиционно заместване в терм)

$(t \approx s \in \Sigma \ \& \ r \in W_\tau(X) \ \& \ p \in Pos(r)) \implies r(p; t) \approx r(p; s) \in \Sigma.$

Едно множество от тъждества Σ се нарича *напълно инвариантна конгруенция*, ако удовлетворява аксиомите D_1, D_2, D_3, D_4, D_5.

Добре известно е, че за дадено множество от тъждества Σ, съществува многообразие $V \subset \mathcal{A}lg(\tau)$, за което $IdV = \Sigma$ точно тогава, когато Σ е напълно инвариантна конгруенция.

Определение 2.2.13 Едно множество Σ от тъждества е SR-

дедуктивно затворено, ако удовлетворява правилата D_1, D_2, D_3 и

SR_1 *(Substitution and Replacement)*

$(t \approx s \in \Sigma \; \& \; r \approx v \in \Sigma \implies t(x \leftarrow r) \approx s(x \leftarrow v) \in \Sigma.$

За всяко множество от тъждества Σ най-малкото (относно включването) $SR-$дедуктивно затворено множество, съдържащо Σ се нарича $SR-$затворена обвивка на Σ и тя се означава с $SR(\Sigma)$.

Нека Σ е едно множество от тъждества от тип τ. За тъждеството $t \approx s \in Id(\tau)$, ще казваме, че $\Sigma \vdash_{SR} t \approx s$ ("Σ SR-доказва $t \approx s$") ако съществува редица от тъждества $t_1 \approx s_1, \ldots, t_n \approx s_n$, такава, че всяко тъждество принадлежи на Σ или е резултат от прилагането на някое от правилата D_1, D_2, D_3 или SR_1 върху предхождащите го тъждества в редицата, като последното тъждество $t_n \approx s_n$ е $t \approx s$.

Нека $t \approx s$ е тъждество и $\mathcal{A}$ е алгебра от тип τ. $\mathcal{A} \models_{SR} t \approx s$ означава, че $\mathcal{A} \models SR(t \approx s)$.

Нека Σ е множество от тъждества. За всяко тъждество $t \approx s \in Id(\tau)$ ще казваме, че $\Sigma \models_{SR} t \approx s$ (и ще го четем: "Σ $SR-$поражда ($SR-$yields) $t \approx s$"), ако за всяка алгебра $\mathcal{A}$, имаме

$$\mathcal{A} \models_{SR} \Sigma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models_{SR} t \approx s.$$

Заедно с $SR-$дедукциите ще разгледаме по аналогия още една дедуктивна система, като резултатите ще получаваме паралелно.

Определение 2.2.14 Едно множество от тъждества Σ е TSR-дедуктивно затворено, ако удовлетворява правилата D_1, D_2, D_3 и

TSR_1 *(Term Substitution and Replacement)*

$$\left\{ \begin{array}{l} (t \approx s \in \Sigma) \; \& \; (r \approx v \in \Sigma) \; \& \; (u \approx w \in \Sigma) \\ \& \; (r \in Sub(t)) \; \& \; (v \in Sub(s)) \end{array} \right\} \implies t(r \leftarrow u) \approx s(v \leftarrow w) \in \Sigma.$$

Доказани са някои от основните свойства на TSR и SR дедукциите.

Теорема 2.2.3 (Birkhoff: The Completeness Theorem for Equational Logic) Нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ е едно множество от тъждества и $t \approx s \in Id(\tau)$. Тогава

(i) $\Sigma \models_{TSR} t \approx s \iff \Sigma \vdash_{TSR} t \approx s$;

(ii) $\Sigma \models_{SR} t \approx s \iff \Sigma \vdash_{SR} t \approx s$.

Основният резултат тук е следната теорема.

Теорема 2.2.4 За всяко множество от тъждества от даден тип Σ са в сила:

(i) $SR(\Sigma)$ е напълно инвариантна конгруенция и $SR(\Sigma) = D(\Sigma)$;

(ii) $TSR(\Sigma)$ е напълно инвариантна конгруенция, но $TSR(\Sigma) \neq D(\Sigma)$ в общия случай.

Тя показва, че SR-обвивките съвпадат с обичаините конгруенции, докато TSR-обвивките задават нови пълни подрещетки на $\mathcal{L}(\tau)$ и $\mathcal{E}(\tau)$.

2.3 Σ-съществени променливи и позиции

Определение 2.2.16[147] Една променлива x_i се нарича *съществена* за t, относно множеството от тъждества $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ *(или Σ-съществена)*, ако съществува алгебра $\mathcal{A}$, за която е в сила

$$\mathcal{A} \models \Sigma \quad \Longrightarrow \quad x_i \in Ess(t, \mathcal{A}).$$

Множеството от всички Σ-съществени променливи за t, ще означаваме с $Ess(t, \Sigma)$.

Ако една променлива не е Σ-съществена за t , тя се нарича Σ-*фиктивна* за t (или фиктивна за t относно Σ). С $Fic(t, \Sigma)$ ще означаваме множеството на фиктивните променливи за t, относно Σ.

Ако $x_{n+1} \in Ess(t(p; x_{n+1}), \Sigma)$, то позицията $p \in Pos(t)$ се нарича $\Sigma-$*съществена* за t. Множеството от всички $\Sigma-$съществени позиции за t ще означаваме с $PEss(t, \Sigma)$. Когато една позиция не е $\Sigma-$съществена за t, тя се нарича $\Sigma-$*фиктивна*. С $PFic(t, \Sigma)$ ще означаваме множеството от всички $\Sigma-$фиктивни позиции за t.

Теорема 2.2.5 Нека $t \in W_\tau(X_n)$ и $\Sigma \subseteq Id(\tau)$. Една променлива x_i е съществена за t, относно Σ, точно тогава, когато съществува терм r от тип τ, за който $r \neq x_i$, и $\mathcal{A} \not\models t \approx t(x_i \leftarrow r)$ за някоя алгебра $\mathcal{A} \in \mathcal{A}lg(\tau)$, за която $\mathcal{A} \models \Sigma$.

Пример 2.2.2 Нека $\tau = (2)$ и да разгледаме следния терм (виж

Фигура 2.7)

$$t = f(f(x_1, x_2), f(f(x_1, x_2), x_3)).$$

Множеството от тъждества, които се удовлетворяват в многообразието RB (rectangular bands) е

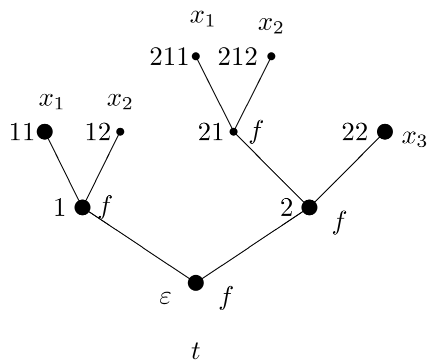
$$\Sigma = \{f(x, f(y, z)) \approx f(f(x, y), z) \approx f(x, z),\ f(x, x) \approx x\}.$$

Веднага може да се докаже, че $\Sigma-$съществените позиции за t са

$$PEss(t, \Sigma) = \{\varepsilon, 1, 11, 2, 22\}$$

и $\Sigma-$фиктивните позиции за t са

$$PFic(t, \Sigma) = Pos(t) \setminus PEss(t, \Sigma) = \{12, 21, 211, 212\}.$$



Фигура 2.7 $\Sigma-$съществени позиции за t от Пример 2.2.2.

Теорема 2.2.7 Нека $t \in W_\tau(X)$ е терм от тип τ и нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ е множество от тъждества от тип τ. Ако $p \in Pos(t)$ е Σ-фиктивна позиция за t, то $\Sigma \models t \approx t(p; v)$, за всеки терм $v \in W_\tau(X)$.

Следователно прилагането на каквито и да са дедуктивни правила върху някоя $\Sigma-$фиктивна променлива, не води до никакви нови тъждества в тази дедуктивна система.

Сложността на проблема за дедукцията на тъждествата, чрез изключване на фиктивни позиции, зависи от сложността на алгоритъма, с който се проверява дали една позиция в даден терм е Σ-съществена или не. Сложността на този алгоритъм е обсъждана в [144], и тя се базира на метода на пълното изчерпване. Този алгоритъм има експоненциална сложност, относно броя на променливите в даден терм, което силно ограничава неговото практическо прилагане.

2.4 $\Sigma-$композиция на термове

При индуктивната композиция, заместваме даден подтерм с нов терм от същия тип. Това заместване се извършва на местата където имаме равни подтермове. Естествено е да поискаме да обобщим ситуацията, като заместваме с нов терм на всички места (позиции) в даден терм, където са разположени "еквивалентни" подтермове, относно дадена напълно инвариантна конгруенция.

Нека $t, r, s \in W_\tau(X)$ и да положим $\Sigma S_r^t = \{v \in Sub(t) \mid \Sigma \models r \approx v\}$ да бъде множеството от всички подтермове на t, които са $\Sigma-$равни (еквивалентни) на r. Нека $\Sigma P_r^t = \{p \in Pos(t) \mid sub_t(p) \in \Sigma S_r^t\}$. Нека $P_r^t = \{p_1, \ldots, p_m\}$ е множеството от минималните елементи в ΣP_r^t, относно наредбата на стринговете $\prec$ в множеството от позициите на даден терм, т.е. $p \in P_r^t$, ако за всяко $q \in Pos(t)$ от $q \in \Sigma P_r^t$ следва $q \not\prec p$.

Определение 2.2.18 $\Sigma-$композиция на t и r със s се дефинира по следния начин:

(i) $\quad t^\Sigma(r \leftarrow s) = t,\;$ ако $\;\Sigma S_r^t = \emptyset;$

(ii) $\quad t^\Sigma(r \leftarrow s) = s,\;$ ако $\;\Sigma \models t \approx r\;$ и

(iii) $\quad t^\Sigma(r \leftarrow s) = f(t_1^\Sigma(r \leftarrow s), \ldots, t_n^\Sigma(r \leftarrow s)),\;$ ако $\;t = f(t_1, \ldots, t_n).$

Може да се докаже, че $t^\Sigma(r \leftarrow s) = t(P_r^t; s)$.

Определение 2.2.19 Едно множество Σ от тъждества е ΣR-дедуктивно затворено, ако удовлетворява правилата D_1, D_2, D_3, D_4 и

ΣR_1 *(Σ Replacement)*

$\left\{ \begin{array}{l} (t \approx s \in \Sigma)\ \&\ (r \approx v \in \Sigma)\ \&\ (u \approx w \in \Sigma) \\ \&\ (r \in Sub(t))\ \&\ (v \in Sub(s)) \end{array} \right\} \Longrightarrow t^{\Sigma}(r \leftarrow u) \approx s^{\Sigma}(v \leftarrow w) \in \Sigma.$

Както за SR и TSR, може да се докаже, че ΣR е един затварящ и адитивен оператор в $Id(\tau)$.

Определение ?? Едно множество от тъждества Σ се нарича глобално инвариантна конгруенция, ако то е $\Sigma R-$дедуктивно затворено. Едно многообразие V от тип τ се нарича стабилно, ако IdV е $\Sigma R-$дедуктивно затворено, т.е. ако $IdV = \Sigma R(IdV)$.

Теорема 2.2.8 $\Sigma R-$затворената обвивка на всяко множество от тъждества е напълно инвариантна конгруенция т.е. $D(\Sigma) \subseteq \Sigma R(\Sigma)$, но $D(\Sigma) \neq \Sigma R(\Sigma)$ в общия случай.

Теорема 2.2.9 Нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ е произволно множество от тъждества. Тогава:

(i) $TSR(\Sigma)$ е глобално инвариантна конгруенция;

(ii) Съществува глобално инвариантна конгруенция, която не е $TSR-$дедуктивно затворено множество.

Регулярни и балансирани тъждества разнообразни приложения в информационните процеси и технологии. Те са двойки от термове, които имат едни и същи променливи или пък имат равен брой на появяванията на всяка променлива. По аналогичен начин тук разглеждаме идеята за $\Sigma-$балансираните тъждества. Тези техни свойства, ги правят удобен инструментариум при решаването на редица изчислителни задачи в теория на системите, програмирането и т.н.

Едно тъждество $t \approx s$ от тип τ е $\Sigma-$*балансирано*, ако $|P^t_r| = |P^s_r|$ за всяко $r \in W_\tau(X)$.

Теорема 2.2.10 Нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ е множество от $\Sigma-$балансирани тъждества. Ако съществува $\Sigma R-$дедукция на $t \approx s$ със $\Sigma-$балансирани тъждества, то $t \approx s$ е едно $\Sigma-$балансирано тъждество от тип τ.

2.5 Хиперсубституции на термове

Свойствата на хиперсубституциите за първи път се изучават в работите на W. Taylor и R. McKenzie през 70-те и 80-те години на миналия век [90, 119]. В следващите 20-ина години, изучаването на хиперсубституциите е предмет и цел на изследователските усилия на редица известни математици, като K. Denecke, D. Lau, R. Pöschel, D. Schweigert, S. Wismath, E. Graczýnska, M. Reichel, J. Koppitz, I. Rosenberg и др., както и на автора на настоящата разработка.

В много отношения хиперсубституциите имат свойства подобни на хомоморфизмите, като пораждат съответствие между терм-алгебрите от един и същи тип. За разлика от хомоморфизмите, които се задават, като изображения между универсумите на две алгебри, то хиперсубституциите са изображения между множеството $\mathcal{F}$ от операционни символи и $W_\tau(X)$.

От началото на 90-те години на 20-ти век до сега, имах възможността[1] да участвувам в изследователската дейност на няколко групи от учени, именно в университетите в Потсдам, Кайзерслаутерн и Дрезден. Повечето от получените резултати са докладвани нееднократно на научни семинари и конференции в тези университети.

Резултатите, които са постигнати, освен алгебричен характер, имат и една насоченост към дискретните структури и са добро изходно начало за различни приложения в компютърните науки.

Определение 2.3.1[58] Нека τ е даден тип и $\mathcal{F}$ е множеството от операционни символи. Тогава изображението $\sigma : \mathcal{F} \to W_\tau(X)$, което присвоява на всеки n-членен операционен символ f по един n-членен терм, се нарича *хиперсубституция* от тип τ (накратко *хиперсубституция*).

Множеството от всички хиперсубституции от тип τ се означава с $Hyp(\tau)$.

[1] Тази възможност за сътрудничество бе финансово осигурена от ежегодните изследователски проекти между университетите в Благоевград и Потсдам, финансирани от фондациите DAAD, DFG и Al. von Humboldt.

Ако σ е хиперсубституция, то тя допуска единствено "хомоморфно" разширение до изображението $\hat{\sigma} : W_\tau(X) \to W_\tau(X)$, дефинирано, чрез равенството: $\hat{\sigma}[f(t_1, \ldots, t_n)] := \sigma(f)(\hat{\sigma}[t_1], \ldots, \hat{\sigma}[t_n])$, където f е n-членен операционен символ, а $t_1, \ldots, t_n$ са термове.

Двучленната операция *композиция* $\circ_h$ в множеството $Hyp(\tau)$ от всички хиперсубституции от тип τ, се дефинира като $\sigma_1 \circ_h \sigma_2$ е една хиперсубституция, която изобразява всеки фундаментален операционен символ f в терма $\hat{\sigma}_1[\sigma_2(f)]$. Така получаваме, $\sigma_1 \circ_h \sigma_2 := \hat{\sigma}_1 \circ \sigma_2$, където $\circ$ означава обичайната композиция на изображения. Операцията $\circ_h$ е асоциативна. Тъждественият елемент е *тъждествената хиперсубституция* σ_{id}, която изобразява всяко f във $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогава $Hyp(\tau) := (Hyp(\tau); \circ_h, \sigma_{id})$ е моноид.

Определение 2.3.2[58] Нека $M := (M; \circ_h, \sigma_{id})$, $(M \subset Hyp(\tau))$ да бъде един подмоноид на $Hyp(\tau)$. Ще казваме, че една алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$, M-хиперудовлетворява едно тъждество $u \approx v$ ако за всяка хиперсубституция $\sigma \in M$, тъждеството $\hat{\sigma}[u] \approx \hat{\sigma}[v]$ се изпълнява, като равенство в $\mathcal{A}$. В този случай, казваме, че тъждеството $u \approx v$ е *M-хипертъждество* на $\mathcal{A}$ и ще пишем $\mathcal{A} \models_{hyp} u \approx v$.

Едно тъждество се нарича *M-хипертъждество на едно многообразие* V, ако то се удовлетворява, като M-хипертъждество във всяка алгебра на V.

Едно многообразие V се нарича *M-солидно*, ако всяко тъждество на V е M-хипертъждество на V.

Когато M е целият моноид $Hyp(\tau)$, тогава всяко M-хипертъждество ще наричаме *хипертъждество*, и съответно M-солидните многообразия в този случай ще наричаме *солидни* многообразия.

Нека M е един подмоноид на $Hyp(\tau)$. Понеже M съдържа тъждествената хиперсубституция, то всяко M-хипертъждество на многообразието V, ще бъде тъждество на V. Това означава, че релацията на M-хиперудовлетвореност, дефинирана между $\mathcal{A}lg(\tau)$ и $Id(\tau)$, е една подрелация на релацията на удовлетвореност, от която определихме индуцираната връзка на Галоа (Id, Mod).

Доказани са редица твърдения, които описват най-важните свойства на солидните многообразия в [58, 59, 60, 61, 146].

Затварящите оператори в множествата $\mathcal{A}lg(\tau)$ и $Id(\tau)$, се дефинират, чрез равенствата

$\chi_M[u \approx v] := \{\hat{\sigma}[u] \approx \hat{\sigma}[v] \mid \sigma \in M\}$ и $\chi_M[\Sigma] = \{\chi_M[u \approx v] \mid u \approx v \in \Sigma\}$

$\psi_M[\mathcal{A}] = \{\sigma[\mathcal{A}] \mid \sigma \in M\}$ и $\psi_M[\mathcal{R}] = \{\psi_M[\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \in \mathcal{R}\}$,

където $\sigma[\mathcal{A}] := \langle A, \{\sigma(f)^{\mathcal{A}}\}_{f \in \mathcal{F}} \rangle$ се нарича *производна алгебра* получена, чрез $\mathcal{A}$ и σ.

Двата оператора χ_M и ψ_M са свързани, като

$$\psi_M[\mathcal{A}] \models u \approx v, \textit{точно тогава, когато } \mathcal{A} \models \chi_M[u \approx v].$$

Следващата теорема показва, че стабилните многообразия не съвпадат със солидните, което оправдава интереса към тях.

Теорема 2.3.2 Съществуват солидни многообразия, които не са стабилни и обратно съществуват стабилни многообразия, които не са солидни.

Така можем да резюмираме, че са в сила следните релации (включвания) $SR(\Sigma) = D(\Sigma) \subseteq \Sigma R(\Sigma) \subseteq TSR(\Sigma)$, които определят съответните фрагменти от решетките $\mathcal{L}(\tau)$ и $\mathcal{E}(\tau)$, които са показани на Фигура 2.8.

Една важна задача е намирането на дълбочината на образа на един терм t при дадена хиперсубституция σ, ако са известни параметрите на t и σ.

Множеството $W_\tau^f(X)$ на пълните термове от даден тип се дефинира, по следния начин:

(i) Ако f е n-членен операционен символ и ако $\pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ е пермутация, то $f(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)})$ е пълен терм.

(ii) Ако f е n-членен операционен символ и ако $t_1, \cdots, t_n$ са пълни термове, тогава $f(t_1, \cdots, t_n)$ е пълен терм.

Изучени са редица свойства на пълните термове, с помощта на които е получена една рекурсивна формула за пресмятане на дълбочината $Depth(\hat{\sigma}[t])$, когато са известни параметрите на σ и t (Теорема 2.3.5).

Интерес представляват хиперсубституциите, които имат поведение на автоморфизми в алгебрата $\underline{W_\tau(X)}$. Това са биективни изображения σ, и като такива те имат за ядро - диагонала на тази алгебра т.е. $Ker(\sigma) = Diag := \{(t,t) | t \in W_\tau(X)\}$.

С $Bij(\tau)$ ще означаваме множеството от всички хиперсубституции $\sigma \in Hyp(\tau)$, за които $\widehat{\sigma} : W_\tau(X) \to W_\tau(X)$ е биекция на множеството $W_\tau(X)$.

Множеството $Bij(\tau) := \langle Bij(\tau); \circ_h, \sigma_{id}\rangle$ образува подмоноид на $Hyp(\tau)$.

Намерени са необходими и достатъчни условия една хиперсубституция да бъде биекция (Теорема 2.3.7).

Със $c(t)$ ще означаваме *дължината* на един терм t, т.е. броя на променливите, които се появяват в t, като се отчита и тяхното повторение, $var(t)$, както обикновено означава множеството от променливите, които се срещат в t и $cv(t)$ означава броя на елементите в множеството $var(t)$

За всяка хиперсубституция σ, да положим $\mathcal{F}_\sigma := X \cup \{\sigma(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$. Ясно е, че ако $s \in \langle \mathcal{F}_\sigma \rangle$, то s е образ на някой терм t при прилагането на σ. Това показва, че $\widehat{\sigma}$ е сюрективно, точно тогава, когато $W_\tau(X)$ се поражда от образите при σ т.е. $W_\tau(X) = \langle \mathcal{F}_\sigma \rangle$. Това поражда съвсем естествения въпрос, за кои $\sigma \in Hyp(\tau)$, множеството $\mathcal{F}_\sigma$ е пълно в $W_\tau(X)$. Такива хиперсубституции ще наричаме *шеферови*.

В Теорема 2.3.8 са намерени необходими и достатъчни условия една хиперсубституция да бъде шеферова.

Нека $\phi(\sigma) = \widehat{\sigma}$ и $\sigma^\phi := \phi(\sigma)$ за всяко $\sigma \in Hyp(\tau)$.

Тогава $\phi : Hyp(\tau) \to W_\tau(X)^{W_\tau(X)}$ е изображение. Ако V е многообразие от тип τ и M е един подмоноид на $Hyp(\tau)$, то V се нарича *$M - \phi$-солидно* точно тогава, когато $\sigma^\phi(s) \approx \sigma^\phi(t) \in IdV$ за всяко $s \approx t \in IdV$ и за всяко $\sigma \in Hyp(\tau)$.

Нека $\nu : Hyp(\tau) \to W_\tau(X)^{W_\tau(X)}$ и $\mu : Hyp(\tau) \to W_\tau(X)^{W_\tau(X)}$ са две изображения, определени за всяко $\sigma \in Hyp(\tau)$ по следния начин:

(i) $\sigma^{\nu}(x) := \sigma^{\mu}(x) := x$ за $x \in X$;
(ii) $\sigma^{\nu}(f_i(t_1, \ldots, t_{n_i})) := \sigma(f_i)(\sigma^{\mu}(t_1), \ldots, \sigma^{\mu}(t_{n_i}))$ и
$\sigma^{\mu}(f_i(t_1, \ldots, t_{n_i})) := f_i(\sigma^{\nu}(t_1), \ldots, \sigma^{\nu}(t_{n_i}))$ за $i \in I$ и
$t_1, \ldots, t_{n_i} \in W_{\tau}(X)$, където $\sigma^{\mu}(t_1), \ldots, \sigma^{\mu}(t_{n_i}), \sigma^{\nu}(t_1), \ldots, \sigma^{\nu}(t_{n_i})$ са вече дефинирани.

Теорема 2.3.9[145] Тривиалното многообразие TR и многообразието Z от всичко нула-полугрупи (т.е. определени с тъждеството $xy \approx zt$) са единствените μ-солидни многообразия от полугрупи.

Теорема 2.3.10[145] Едно многообразие V от полугрупи е $Bij(2)-\mu$-солидно, точно тогава, когато

(i) $V \subseteq Mod\{x(yz) \approx (xy)z,\ xyz \approx zxy\}$ и

(ii) $V \subseteq Mod\{x(yz) \approx (xy)z,\ xyz \approx xzy \approx zxy\}$, само ако съществува тъждество $s \approx t \in IdV$, за което $cv(s) = c(s) = 3$ и $c(t) \neq 3$ или $cv(t) \neq 3$ или $var(t) \neq var(s)$.

Теорема 2.3.11[145] Тривиалното многообразие TR е единственото ν-солидно многообразие от полугрупи.

Теорема 2.3.12[145] Едно многообразие V от полугрупи е $Bij(2)-\nu$-солидно точно тогава, когато

(i) $V \subseteq Mod\{x(yz) \approx (xy)z,\ xyz \approx zxy\}$ и

(ii) V е многообразие от комутативни полугрупи, за което съществува тъждество $s \approx t \in IdV$, за което $cv(s) = c(s) = 2$ и $c(t) \neq 2$ или $cv(t) \neq 2$ или $var(t) \neq var(s)$.

Определение 2.3.13[145] Нека $\gamma_n : Hyp(\tau) \to W_{\tau}(X)^{W_{\tau}(X)}$ е изображение, което за всяко естествено число n съпоставя на всяка хиперсубституция по една редица от термове по следния начин:
Ако $\sigma \in Hyp(\tau)$, то полагаме

(i) $\sigma^{\gamma_0} := \widehat{\sigma}$;
(ii) $\sigma^{\gamma_n}(x) := x$ за $x \in X$ и $n \in N$;
(iii) $\sigma^{\gamma_n}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f(\sigma^{\gamma_{n-1}}(t_1), \ldots, \sigma^{\gamma_{n-1}}(t_n))$ за $n \in N$, $f \in \mathcal{F}_n$ и $t_1, \ldots, t_n \in W_{\tau}(X)$.

Да положим $Hyp^{(n)}(\tau) := \{\sigma^{\gamma_n} \mid \sigma \in Hyp(\tau)\}$ за $n \in N$.

Теорема 2.3.13[145] Нека τ е произволен нетривиален тип. Тогава моноидите $\langle Hyp^{(n)}(\tau); \circ, \sigma_{id}^{\gamma_n}\rangle$ и $Hyp(\tau)$ са изоморфни за всяко естествено число n.

Теорема 2.3.14[145] Нека $1 \leq n \in N$ и нека V е многообразие от полугрупи. Многообразието V е γ_n-солидно, точно тогава, когато $x_1 \dots x_{n+1} \approx y_1 \dots y_{n+1} \in IdV$.

2.6 Мулти-хиперсубституции на термове

Съвкупността на всички многообразия от даден тип образува пълна решетка, която е много сложна и трудна за изучаване. Мулти-хиперсубституциите и C-солидните многообразия дават един нов метод за изучаване на пълните подрешетки на тази решетка.

В един терм, даден операционен символ може да се появява по-вече от един път. За да се различават различните появявания на един и същи операционен символ ще присвояваме по един *цвят* на всяко появяване на операционен символ, в дадения терм. По този начин, от представянето на един терм, като дърво, ще получим дърво с оцветени върхове.

Определение 2.4.1[146] Нека $M \subseteq Hyp(\tau)$ едно подмножество на $Hyp(\tau)$. Нека ρ е изображение на $\mathbb{N}$ в M т.е. $\rho : \mathbb{N} \to M$. Всяко такова изображение се нарича *мулти-хиперсубституция* над M от тип τ.

Да означим със σ_q образа на $q \in \mathbb{N}$ при ρ т.е. $\rho(q) = \sigma_q \in M$. Множеството от всички мулти-хиперсубституции над M от тип τ ще означаваме с $Mhyp(\tau, M)$. Мулти-хиперсубституциите могат да се задават, като редици от хиперсубституции на $Hyp(\tau)$, а именно $\rho := (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$, където $\sigma_q = \rho(q)$ за $q \in \mathbb{N}$.

Нека $Pos(t)$ е множеството от всички позиции на терма t. Всяко изображение α_t от $Pos(t)$ в $\mathbb{N}$ се нарича *оцветяване на терма* t. Да означим с C_t множеството от всички оцветявания на терма t. Едно множество $C \subseteq \bigcup\{C_r \mid r \in W_\tau(X)\}$, за което $|C_r \cap C| = 1$ за всяко $r \in W_\tau(X)$, се нарича оцветяване на $W_\tau(X)$.

Ще предполагаме, че всички термове от $W_\tau(X)$ са еднократно оцветени, чрез едно избрано и фиксирано оцветяване C.

Нека C е оцветяване на $W_\tau(X)$ и $\alpha_t \in C$ е оцветяване на даден терм $t \in W_\tau(X)$. Нека ρ е мулти-хиперсубституция и $s \in Sub(t)$ е подтерм на t с позиция p, като подтерм на t.

(i) Ако $s \in X$, то $\widehat{\rho}_{C,t}[t] := s$;

(ii) Ако $s = f(s_1, \ldots, s_n)$, където $s = sub_t(p)$, то

$$\widehat{\rho}_{C,t}[s] := \rho(\alpha_t(a))(f)(\widehat{\rho}_{C,t}[s_1], \ldots, \widehat{\rho}_{C,t}[s_n]).$$

Чрез изображението $\widehat{\rho}_{C,t} : Sub(t) \to W_\tau(X)$, можем да разширим действието на мулти-хиперсубституциите върху множеството от всички термове, като положим $\widehat{\rho}_C[t] := \widehat{\rho}_{C,t}[t]$.

В множеството на всички мулти-хиперсубституции се дефинира една асоциативна двучленна операция, чрез равенството $(\rho_1 \circ_C \rho_2)(k) := \rho_1(k) \circ_h \rho_2(k)$.

Нека C е оцветяване на $W_\tau(X)$ и $\Sigma \subseteq Id(\tau)\rho \in Mhyp(\tau, M)$ и нека $\mathcal{A} = \langle A; \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ е алгебра от тип τ. Да положим

$$\chi^e_C[\Sigma] := \{\widehat{\rho}_C[u] \approx \widehat{\rho}_C[v] \mid u \approx v \in \Sigma,\ \rho \in Mhyp(\tau, M)\} = \chi^{e,0}_C[\Sigma].$$

За $n \in I\!N$, полагаме $\chi^{e,n+1}_C[\Sigma] := \chi^{e,}_C[\chi^{e,n}_C[\Sigma]]$. Нека $\chi_C[\Sigma] := \bigcup\{\chi^{e,n}_C[\Sigma] \mid n \in I\!N\}$ (вж. Определение 2.4.6[146]). Да положим $\psi_C[\mathcal{R}] := \{\rho[\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \in \mathcal{R},\ \rho \in Mhyp(\tau, M)\}$, където $\rho[\mathcal{A}] := \langle A; \mathcal{F}^{\rho[\mathcal{A}]} \rangle$ е *производна алгебра* (вж. Определение 2.4.8[146]).

Едно многообразие V от тип τ се нарича C- солидно, ако $IdV = \chi_C[IdV]$.

Лесно се проверява, че операторите ψ_C и χ_C имат свойствата на напълно адитивни затварящи оператори.

От следващата лема следва, че всяко $C-$солидно многообразие е солидно.

Лема 2.4.2[146] Нека C да бъде оцветяване на $W_\tau(X)$. Тогава

(i) $\chi[\Sigma] \subseteq \chi_C[\Sigma]$ за всяко $\Sigma \subseteq Id(\tau)$.

(ii) $\psi_C[\mathcal{R}] = \psi[\mathcal{R}]$ за всяко $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}lg(\tau)$.

Теорема 2.4.1[146] За даден тип τ, двойката $(\chi_C\ ,\psi_C)$ в общия случай не е спрегната двойка от напълно адитивни затварящи оператори, т.е. не образуват връзка на Галоа.

Теорема 2.4.2[146] Нека C е едно оцветяване на $W_\tau(X)$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}lg(\tau)$ и $\Sigma \subseteq Id(\tau)$. При тези предположения е в сила:

(i) $ModId\psi_C[\mathcal{R}] \subseteq \mathcal{C}Mod\mathcal{C}Id\mathcal{R}$, но обратното включване в общия случай не е в сила;

(ii) $\mathcal{C}Id\mathcal{C}Mod\Sigma \subseteq IdMod\chi_C[\Sigma]$, но обратното включване в общия случай не е в сила.

C- солидните многообразия се описват от C-*хипер теории*, за които $\mathcal{C}Mod\Sigma = Mod\Sigma$.

C-хипер теориите имат свойства, както и обикновените теории от тъждества. В сила е следната теорема.

Теорема 2.4.3[146] Нека $\Sigma \in \mathcal{E}(\tau)$. Следните условия са еквивалентни:

(i) $\mathcal{C}Mod\Sigma = Mod\Sigma$;

(ii) $\Sigma = \mathcal{C}Id\mathcal{C}Mod\Sigma$;

(iii) $\Sigma = \chi_C\ [\Sigma]$;

(iv) $\mathcal{C}IdMod\Sigma = \Sigma$.

По-горе C-солидните многообразия V бяха дефинирани, чрез свойството $IdV = \chi_C[IdV]$. В посоката на изясняване на свойствата на такива многообразия, е доказана следната теорема:

Теорема 2.4.4[146] Нека C е оцветяване на $W_\tau(X)$ и V е многообразие от тип τ. Следните условия (i)-(iii) са еквивалентни:

(i) $\mathcal{C}ModIdV = V$;

(ii) $IdV = \mathcal{C}IdV$;

(iii) $\chi_C[IdV] = IdV$.

Нещо повече, всяко от условията $(i) - (iii)$ имплицира двете равенства $V = \mathcal{C}Mod\mathcal{C}IdV$ и $\psi_C[V] = V$, но обратните импликации, в общия случай, не са в сила.

За мулти-хиперсубституциите и оцветените термове е в сила и следната теорема.

Теорема 2.4.5[146] Нека $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}lg(\tau)$, и нека C е оцветяване на $W_\tau(X)$ и $\Sigma \subseteq Id(\tau)$. Тогава са в сила следните отношения:

(i) $\chi_C[\Sigma] \subseteq IdMod\Sigma \Longleftrightarrow IdMod\Sigma \supseteq \mathcal{C}Id\mathcal{C}Mod\Sigma$.

(ii) $\chi_C[\Sigma] \subseteq IdMod\Sigma \Longleftarrow \chi_C[IdMod\Sigma] \subseteq IdMod\Sigma$.

(iii) $\psi_C[\mathcal{R}] \subseteq ModId\mathcal{R} \Longleftarrow ModId\mathcal{R} = \mathcal{C}Mod\mathcal{C}Id\mathcal{R}$.

(iv) $\psi_C[\mathcal{R}] \subseteq ModId\mathcal{R} \Longleftrightarrow \psi_C[ModId\mathcal{R}] \subseteq ModId\mathcal{R}$.

В общия случай обратните импликации на (ii) и (iii), не са верни.

По-нататък ще се спрем по-детайлно на работата на мултихиперсубституциите върху оцветени термове, за което вече стана дума погоре.

Нека t е терм от тип τ. Да означим със $Sub^{\mathcal{F}}(t)$ множеството от всички подтермове на t, които не са променливи т.е. които са маркирани (етикетирани) с операционни символи от $\mathcal{F}$, а с $Pos^{\mathcal{F}}(t) := \{p \in Pos(t) \mid sub_t(p) \in Sub^{\mathcal{F}}(t)\}$, да означим множеството от позициите на t, които съответстват на термове от $Sub^{\mathcal{F}}(t)$. Всяка функция $\alpha_t : Pos^{\mathcal{F}}(t) \to I\!N$ се нарича *оцветяваща функция или оцветяване* на терма t.

Със C_t означаваме множеството от всички оцветявания на терма t т.е. $C_t := \{\alpha_t \mid \alpha_t : Pos^{\mathcal{F}}(t) \to I\!N\}$.

Ако $p \in Pos^{\mathcal{F}}(t)$, то под $\alpha_t(p) \in I\!N$ ще разбираме стойността на оцветяващата функция α_t, която се приписва на корена на подтерма $s = sub_t(p)$, докато $\alpha_t[p]$ ще означава рестрикцията (ограничението) на функцията α_t върху $p \circ Pos^{\mathcal{F}}(s)$, дефинирана по следния начин $\alpha_t[p](k) = \alpha_t(q)$, ако $q = pk$ за всяко $k \in Pos^{\mathcal{F}}(s)$, тъй като $p \circ Pos^{\mathcal{F}}(s) \subseteq Pos^{\mathcal{F}}(t)$.

Определение 2.4.13 Множеството $W_\tau^c(X)$ от всички оцветени термове от тип τ се дефинира по следния начин:

(i) $X \subset W_\tau^c(X)$;

(ii) ако $f \in \mathcal{F}$, то $\langle f, q\rangle \in W_\tau^c(X)$ за всяко $q \in I\!N$;

(iii) ако $t = f(t_1, \ldots, t_n) \in W_\tau(X)$, то $\langle t, \alpha_t\rangle \in W_\tau^c(X)$ за всяко $\alpha_t \in C_t$.

Когато оцветеният терм $\langle t, \alpha_t\rangle$ е получен както в (iii), ще го наричаме композиран оцветен терм и ще пишем $\langle t, \alpha_t\rangle$:=

$\langle f,q\rangle(\langle t_1,\alpha_{t_1}\rangle,\ldots,\langle t_n,\alpha_{t_n}\rangle)$, където $q=\alpha_t(\varepsilon)$ и $\alpha_{t_i}=\alpha_t[i]$ за $i=1,\ldots,n$.

Нека $\langle t,\alpha_t\rangle\in W^c_\tau(X)$ е един оцветен терм. Неговото множество $Sub_c(\langle t,\alpha_t\rangle)$ от оцветени подтермове се дефинира индуктивно по следния начин: За всяко $x\in X$ имаме $Sub_c(x):=\{x\}$ и ако $\langle t,\alpha_t\rangle=\langle f,q\rangle(\langle t_1,\alpha_{t_1}\rangle,\ldots,\langle t_n,\alpha_{t_n}\rangle)$, то

$$Sub_c(\langle t,\alpha_t\rangle):=\{\langle t,\alpha_t\rangle\}\cup Sub_c(\langle t_1,\alpha_{t_1}\rangle)\cup\ldots\cup Sub_c(\langle t_n,\alpha_{t_n}\rangle).$$

Както при обикновените термове и тук се дефинират индуктивна $\langle t,\alpha_t\rangle(\langle r,\alpha_r\rangle\leftarrow\langle s,\alpha_s\rangle)$ и позиционна $\langle t,\alpha_t\rangle(p;\langle s,\alpha_s\rangle)$ композиции на оцветени термове.

Теорема 2.4.6 Ако $t,s,r\in W_\tau(X)$, $p\in Pos(t)$ и $q\in Pos(s)$, то

$$\langle t,\alpha_t\rangle(p;\langle s,\alpha_s\rangle(q;\langle r,\alpha_r\rangle))=\langle t,\alpha_t\rangle(p;\langle s,\alpha_s\rangle)(pq;\langle r,\alpha_r\rangle),$$

където $\alpha_t\in C_t$, $\alpha_s\in C_s$, $\alpha_r\in C_r$.

Да означим със σ_q образа на $q\in I\!N$ при ρ т.е. $\rho(q)=\sigma_q\in M$. Множеството от всички мулти-хиперсубституции над M от тип τ ще означаваме с $Mhyp(\tau,M)$. Когато съществуват $q\in I\!N$ и $\sigma\in Hyp(\tau)$ такива, че $\rho(q)=\sigma$, ще пишем $\sigma\in\rho$.

Това ни позволява да разглеждаме всяка мулти-хиперсубституция ρ, като изображение на оцветените фундаментални термове в множеството $W^c_\tau(X)$ по следния начин:

Нека $\mathcal{F}^c:=\{\langle f,q\rangle\mid f\in\mathcal{F},q\in I\!N\}$ е множеството от всички оцветени фундаментални термове.

Тогава $\rho:\mathcal{F}^c\to W^c_\tau(X)$ и за всяко $\langle f,q\rangle\in\mathcal{F}^c$ имаме $\rho(\langle f,q\rangle):=\langle s,\alpha_s\rangle$, където $s=\sigma_q(f)$ и $\alpha_s(p)=q$ за всяко $p\in Pos^{\mathcal{F}}(s)$.

За да дефинираме разширение на една мулти-хиперсубституция в множеството на всички оцветени термове, това ще направим, най-наред за множеството от оцветени подтермове на даден терм.

Нека $t\in W_\tau(X)$ и $\alpha_t:Pos^{\mathcal{F}}(t)\to I\!N\in C_t$. Разглеждаме изображението ρ_{α_t}, което ще дефинираме за подтермовете на t. Нека $p\in Pos(t)$, $s=sub_t(p)$ и $\alpha_t(p)=m$. *Разширението* ρ_{α_t} върху s се задава по следния начин:

(i) ако $s=x_j\in X$, то $\rho_{\alpha_t}[s]:=x_j$;

(ii) ако $s = f(x_1, \dots, x_n)$, то $\rho_{\alpha_t}[s] := \sigma_m(f)$;

(iii) ако $s = f(s_1, \dots, s_n)$, то $\rho_{\alpha_t}[s] := \sigma_m(f)(\rho_{\alpha_t}[s_1], \dots, \rho_{\alpha_t}[s_n])$.

Всяка мулти-хиперсубституция, като се прилага върху даден оцветен терм освен, че изобразява този терм в нов терм от същият тип, тя ще трябва да снабди този нов терм с ново оцветяване. И тук най-напред ще дефинираме тези нови оцветявания върху множеството от подтермовете на един терм и след това ще достигнем до оцветяването на самия терм-образ при дадената мулти-хиперсубституция.

Нека $t \in W_\tau(X)$ и $\alpha_t \in C_t$. Нека $p \in Pos(t)$, $s = sub_t(p)$ и $\alpha_t(p) = m$. Изображението $\rho_t[\alpha_s]$, съпоставя на всяко оцветяване на s по едно оцветяване на образа $\rho_{\alpha_t}[s]$ на терма s при ρ. То се задава по следния начин:

(i) ако $s = f(x_1, \dots, x_n)$, то $\rho_t[\alpha_s](q) := m$ за всяко $q \in Pos^{\mathcal{F}}(\rho_{\alpha_t}[s])$;

(ii) ако $s = f(s_1, \dots, s_n)$, и $q \in Pos^{\mathcal{F}}(\rho_{\alpha_t}[s])$, то

$$\rho_t[\alpha_s](q) = \begin{cases} m & \text{ако} \quad q \in Pos^{\mathcal{F}}(\sigma_m(f)); \\ \rho_t[\alpha_{s_j}](k) & \text{ако} \quad q = lk, \text{ за някое } j,\ j \leq n, \\ & k \in Pos^{\mathcal{F}}(\rho_{\alpha_t}[s_j]),\ l \in Pos^X(\sigma_m(f)). \end{cases}$$

за всяко $r \in Pos^{\mathcal{F}}(\rho_{\alpha_t}[s])$.

Определение 2.4.18 *Разширението* $\rho : W_\tau^c(X) \to W_\tau^c(X)$ на дадена произволна мулти-хиперсубституция ρ в множеството от всички оцветени термове се задава, по следния начин:

(i) $\rho[x] := x$ за всяко $x \in X$;

(ii) ако $t = f(t_1, \dots, t_n)$ и $\alpha_t \in C_t$, то $\rho[\langle t, \alpha_t \rangle] := \langle \rho_{\alpha_t}[t], \rho_t[\alpha_t] \rangle$.

В множеството $Mhyp(\tau, M)$ се дефинира двучленна операция по следния начин:

Определение 2.4.19 Нека $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ са две мулти-хиперсубституции. Тогава суперпозицията $\rho^{(1)} \circ_{ch} \rho^{(2)} : I\!N \to M$ изобразява всеки цвят $q \in I\!N$ по следния начин: $(\rho^{(1)} \circ_{ch} \rho^{(2)})(q) := \rho^{(1)}(q) \circ_h \rho^{(2)}(q)$.

Лема 2.4.5 За всеки две мулти-хиперсубституции $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ и за всеки оцветен терм $\langle t, \alpha_t \rangle$ е в сила следното равенство

$$(\rho^{(1)} \circ_{ch} \rho^{(2)})[\langle t, \alpha_t \rangle] := \rho^{(1)}[\rho^{(2)}[\langle t, \alpha_t \rangle]].$$

Теорема 2.4.9 Операцията $\circ_{ch}$ е асоциативна т.е. за всеки три мулти-хиперсубституции $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ и $\rho^{(3)}$ е в сила

$$\rho^{(1)} \circ_{ch} (\rho^{(2)} \circ_{ch} \rho^{(3)}) = (\rho^{(1)} \circ_{ch} \rho^{(2)}) \circ_{ch} \rho^{(3)}.$$

Нека $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}\rangle$ е една алгебра от тип τ. Всеки оцветен терм определя по една терм-операция (функция) в множеството A, като $\langle t, \alpha_t\rangle^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) := t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ за $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$.

Да означим с $\rho(\mathcal{F})$ множеството от термове $\rho(\mathcal{F}) := \{\sigma(f) \in W_\tau(X) \mid f \in \mathcal{F}, \sigma \in \rho\}$.

Нека $\rho = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ е една мулти-хиперсубституция над моноида M. Алгебрата $\rho[\mathcal{A}] = \langle A, \rho(\mathcal{F})^{\rho[\mathcal{A}]}\rangle$, ще наричаме *производна алгебра* при мулти-хиперсубституцията ρ.

Лема 2.4.6 За всяко $\langle t, \alpha_t\rangle \in W^c_\tau(X)$ е в сила $\langle t, \alpha_t\rangle^{\rho[\mathcal{A}]} = \rho[\langle t, \alpha_t\rangle]^{\mathcal{A}}$.

Нека M е моноид от хиперсубституции от тип τ и ρ е мулти-хиперсубституция над моноида M. Нека $\mathcal{A}$ е алгебра от тип τ и $\mathcal{R}$ е клас от алгебри от тип τ. Операторът ψ^c_M се дефинира по следния начин:

$$\psi^c_M[\mathcal{A}] := \{\rho[\mathcal{A}] \mid \rho \in Mhyp(\tau, M)\} \text{ и } \psi^c_M[\mathcal{R}] := \{\psi^c_M[\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \in \mathcal{R}\}.$$

С $\rho[t \approx s]$ ще означаваме $\rho[t \approx s] := \{\rho_{\alpha_t}[t] \approx \rho_{\alpha_s}[s] \mid \alpha_t \in C_t,\ \alpha_s \in C_s\}$. Нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ е множество от тъждества от тип τ. Операторът χ^c_M се дефинира по следния начин:

$$\chi^c_M[t \approx s] := \{\rho[t \approx s] \mid \rho \in Mhyp(\tau, M)\} \text{ и } \chi^c_M[\Sigma] := \{\chi^c_M[t \approx s] \mid t \approx s \in \Sigma\}.$$

Определение 2.4.20 Нека $t, s \in W_\tau(X)$ са два терма от тип τ. Тъждеството $t \approx s \in Id\mathcal{A}$ се нарича *M-мулти-хипертъждество в алгебра $\mathcal{A}$*, (казваме още, че тъждеството $t \approx s$ се *M-мулити-хиперудовлетворява* в $\mathcal{A}$), ако за всяка мулти-хиперсубституция $\rho \in Mhyp(\tau, M)$ е в сила $\mathcal{A} \models \rho[t \approx s]$. Когато $t \approx s$ е M-мулти-хипертъждество в $\mathcal{A}$ ще пишем $\mathcal{A} \models_{Mh} t \approx s$, а множеството от всички M-мулти-хипертъждества в $\mathcal{A}$ ще означаваме с $HC_M Id\mathcal{A}$.

Алгебрите в които всяко тяхно тъждество е и M-мулти-хипертъждество се наричат *M-мулти-солидни.* Следователно една алгебра $\mathcal{A}$ от тип τ е M-мулти-солидна, ако $\chi^c_M[Id\mathcal{A}] \subseteq Id\mathcal{A}$. По аналогия със случая на обикновените хиперсубституции, ще смятаме, че едно многообразие $V \subseteq \mathcal{A}lg(\tau)$ от тип τ, е *M-мулти-солидно,* ако $\chi^c_M[IdV] \subseteq IdV$.

Когато $M = Hyp(\tau)$, ще казваме, че съответната алгебра и многообразие са мулти-солидни.

Теорема 2.4.10 Нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}lg(\tau)$. Тогава

(i) $\chi_M[\Sigma] \subseteq \chi^c_M[\Sigma]$ за всяко $\Sigma \subseteq Id(\tau)$;

(ii) $\psi_M[\mathcal{R}] = \psi^c_M[\mathcal{R}]$ за всяко $\mathcal{R} \subseteq Alg(\tau)$.

Теорема 2.4.11 Всяко M-мулти-солидно многообразие е M-солидно, но обратното в общия случай не е вярно, т.е. съществуват $M-$солидни многообразия, които не са $M-$мулти-солидни.

Нека $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}lg(\tau)$ и $\Sigma \subset Id(\tau)$. Тогава нека да определим:

$$HC_M Mod\Sigma = \{\mathcal{A} \in \mathcal{A}lg(\tau) \mid \mathcal{A} \models_{Mh} t \approx s \text{ \textit{за всяко} } t \approx s \in \Sigma\};$$

$$HC_M Id\mathcal{R} = \{s \approx t \in Id(\tau) \mid \chi^c_M[s \approx t] \subseteq Id\mathcal{R}\};$$

и

$$HC_M Var\mathcal{R} := HC_M Mod HC_M Id\mathcal{R}.$$

Следващата теорема характеризира операторите $HC_M Id$ и $HC_M Mod$.

Теорема 2.4.12 Нека $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}lg(\tau)$. Ако $\Sigma = HC_M Id\mathcal{R}$ и $\mathcal{R} = HC_M Mod\Sigma$, то $\mathcal{R} = Mod\Sigma$ и $\Sigma = Id\mathcal{R}$.

Твърдение 2.4.9

(i) $\mathcal{A} \models \rho_{\alpha_t}[t] \approx \rho_{\alpha_s}[s] \iff \rho[\mathcal{A}] \models t \approx s$;

(ii) $\mathcal{A} \models_{Mh} t \approx s \iff \chi^c_M[t \approx s] \subseteq Id\mathcal{A} \iff \psi^c_M[\mathcal{A}] \models t \approx s$;

(iii) $\Sigma \subseteq HC_M Id\mathcal{R} \iff \chi^c_M[\Sigma] \subseteq Id\mathcal{R} \iff \Sigma \subseteq Id\psi^c_M[\mathcal{R}] \iff \chi^c_M[\Sigma] \subseteq HC_M Id\mathcal{R}$;

(iv) $\mathcal{R} \subseteq HC_M Mod\Sigma \iff \psi^c_M[\mathcal{R}] \subseteq Mod\Sigma \iff \mathcal{R} \subseteq Mod\chi^c_M[\Sigma] \iff \psi^c_M[\mathcal{R}] \subseteq HC_M Mod\Sigma$;

(v) $HC_M Id\mathcal{R} \subseteq Id\mathcal{R}$;

(vi) $Var\mathcal{R} \subseteq HC_M Var\mathcal{R}$;

(vii) Двойката $\langle HC_M Id, HC_M Mod\rangle$ образува връзка на Галоа.

Определение 2.4.21 Едно множество Σ от тъждества се нарича Mh-дедуктивно затворено, ако то удовлетворява аксиомите D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 и

Mh_1 *(Multi-Hypersubstitution)*

$(t \approx s \in \Sigma \ \&\ \rho \in Mhyp(\tau, M)) \implies \rho[t \approx s] \subseteq \Sigma.$

За всяко множество от тъждества Σ, най-малкото (относно включването) $Mh-$дедуктивно затворено множество, което съдържа Σ се нарича $Mh-$дедуктивна обвивка на Σ и тя се означава с $Mh(\Sigma)$. Очевидно за всяка напълно инвариантна конгруенция Σ е в сила $Mh(\Sigma) = \chi^c_M[\Sigma]$.

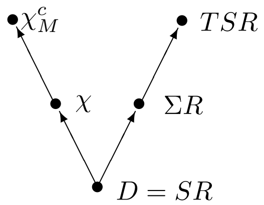
Нека Σ е произволно множество от тъждества от тип τ. За $t \approx s \in Id(\tau)$ ще казваме, че $\Sigma \vdash_{Mh} t \approx s$ ("Σ Mh-доказва $t \approx s$"), ако съществува редица от тъждества $t_1 \approx s_1, \ldots, t_n \approx s_n$, такава че всяко тъждество от нея принадлежи на Σ или е резултат от прилагането на някое от правилата D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 или Mh_1 върху предхождащите го тъждества, като последното тъждество $t_n \approx s_n$ е $t \approx s$.

Теорема 2.4.13 *(Birkhoff: Completeness Theorem for Multi-hyperequational Logic)* За всеки $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ и $t \approx s \in Id(\tau)$ е в сила:

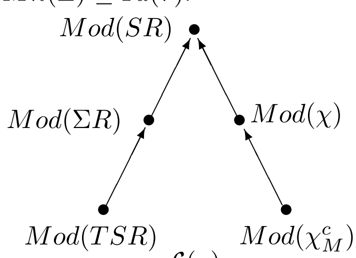
$$\Sigma \models_{Mh} t \approx s \iff \Sigma \vdash_{Mh} t \approx s.$$

Съгласно Теорема 2.4.11 съществуват множества от тъждества Σ, за които $Mh(\Sigma) \neq D(\Sigma)$ и $Mh(\Sigma) \neq HC_M Id HC_M Mod\Sigma$. Така до тук получихме следните включвания (Фигура 2.8).

$$\Sigma \subseteq HC_M Id HC_M Mod\Sigma \subseteq Mh(\Sigma) \subseteq Id(\tau).$$



$\mathcal{E}(\tau)$



$\mathcal{L}(\tau)$

Фигура 2.8 Фрагменти от решетките $\mathcal{E}(\tau)$ и $\mathcal{L}(\tau)$, съответстващи на SR, TSR, ΣR, χ и χ^c_M-операторите.

Естествено възниква въпросът за това, кога $Mh(\Sigma) \neq Id(\tau)$, т.е. кога операторът χ^c_M трансформира напълно инвариантни конгруенции в теории на нетривиални многообразия от тип τ. Всъщност това е въпросът за описание на нетривиалните $M-$мулти-солидни многообразия.

Едно множество Σ от тъждества се нарича *пълно*, ако съществуват две естествени числа i и j, за които $i \neq j$ и $\Sigma \models x_i \approx x_j$.

Едно многообразие V от тип τ се нарича *тривиално*, ако IdV е пълна конгруенция. Ясно е, че тривиалните многообразия съдържат само тривиалната алгебра от даден тип.

Определение 2.4.22 Една напълно инвариантна конгруенция Σ се нарича *пред-пълна*, ако $\Sigma \neq Id(\tau)$ и за всяко тъждество $t \approx s$, за което $\Sigma \not\models t \approx s$ е в сила $D(\Sigma \cup \{t \approx s\}) = Id(\tau)$.

Едно многообразие V от тип τ се нарича *пред-тривиално*, ако IdV е пред-пълна конгруенция.

Изучени са основните свойства на пред-пълните конгруенции

Теорема 2.4.16 Ако $\tau = (n)$, $n \geq 1$, то за всяка непълна конгруенция Σ съществуват моноид $M \subseteq Hyp(\tau)$ от хиперсубституции и множество $\Psi \subset Id(\tau)$ от тъждества такива, че $\Sigma \subseteq \Psi$ и $\chi^c_M[\Psi]$ е предпълна конгруенция.

Тук стои отворен проблемът, дали горното твърдение е в сила за произволен тип.

"Работата" на мулти-хиперсубституциите над оцветените термове, много силно зависи от това дали множеството от цветовете е крайно или не, т.е. дали те приемат стойностите си в крайно или безкрайно множество M от хиперсубституции.

Показано е, че когато множеството от цветовете е крайно, то мулти-хиперсубституциите могат да се заменят с обичайните хиперсубституции, само че от по-сложен тип (Теорема 2.4.11).

Глава 3. Отделимост за автомати с дървета

Изучаването на автомати, работещи с дървета (Tree Automata - TA) има дълга история, както в компютърните науки, така и в някои от фундаменталните раздели на алгебрата, свързани с изучаване на алгебрични многообразия и др.(Вж. [53, 74, 120]).

Автоматите с дървета възникват в контекста на верификацията на вериги и схеми в логическото програмиране. През 70-те години на миналия век бяха получени редица нови резултати, отнасящи се до автомати с дървета, като важна част на теоретичните основи на програмирането и изобщо на науките свързани със съвременното развитие на компютрите. Така от края на 70-те години автоматите с дървета се използват, като мощен инструментариум за верификация на програмите. Получени са редица резултати, които свързват свойствата на програмите със системите за типизация на данните и за възстановяване на дървета, чрез автомати.

Една от причините за нарастващия интерес към TA е бързото развитие на електронните комуникационни технологии през последните двадесетина години и по-конкретно развитието на метаезиците за пораждане на документи (пораждащи граматики за документи), като Standard Generalized Markup Language (SGML) и eXtensible Markup Language (XML) [39].

Повечето от работите върху класовете от документни граматики се базират на теорията на TA, тъй като формалните граматиките, не винаги са подходящите средства за моделиране на различните приложения. TA осигуряват естествена рамка за изследване на:
-трансформациите на дървета,
- езиците за заявки от дървета,
- генериране и поддържане на слоеве от дървета,
- контекстни спецификации и оценки и др. [40, 39].

Класическа и основополагаща в тази област се счита превъзходната книга *Tree Automata* на F. Gécseg и M. Steinby, издадена през 80-те години на миналия век от Унгарската академия на науките ([74]). Днес една от най-пълните и най-достъпни книги в тази област е енциклопедичната работа [53] на група от френски математици H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison и M. Tommasi, разработена в университета в Лил.

3.1 Разпознаватели на дървета

Идеята, на крайните автомати да се гледа, като на унарни (едночленни) алгебри възниква в работите на J.Buchi и J.Wright (1960). В много работи дърветата се дефинират като термове. Изследванията на регулярните и безконтекстните граматики с дървета се отнасят към началото на 60-те години на миналия век.

Ако $X = \emptyset$, то $W_\tau(X)$ също се записва като W_τ. Термовете в W_τ се наричат *основни (ground) термове (дървета).*

Всеки терм t, определя еднозначно едно дърво, което често се отъждествява със самия терм.

Всяко подмножество L на $W_\tau(X)$ се нарича *език от термове (дървета).*

Тъй като ние ще разглеждаме крайни автомати с дървета, в контекста на техните приложения за "рационализация" (минимизиране) на термове (дървета), относно съществени входове и отделими множества от подтермове, ще възприемем една по-опростена дефиниция на автомати, която няма да повлияе особено на строгостта на нашите разглеждания.

Определение 3.1.1 *Краен автомат с дървета* е наредена четворка $\mathcal{A} = \langle Q, \mathcal{F}, Q_f, \Delta \rangle$, където:

- Q е крайно множество от *състояния*;

- $Q_f \subseteq Q$ е *множество от заключителни (финални) състояния*;

- Δ е *множество от правила за преход (функция на преходите)* т.е. ако

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_n \quad \text{то} \quad \Delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n\},$$

където Δ_i са изображения $\Delta_0 : F_0 \to Q$, и $\Delta_i : \mathcal{F}_i \times Q^i \to Q$, за $i = 1, \ldots, n$.

Нека $Y \subseteq X$ е множество от променливи и $\gamma : Y \to \mathcal{F}_0$ е функция, която присвоява нуларен (константен) операционен символ на всяка входна променлива от Y. Функцията γ се нарича *присвояване за множеството от входове* Y, а множеството от такива присвоявания ще означаваме с $Ass(Y, \mathcal{F}_0)$.

Всъщност присвояванията, когато $Y = X$ превръщат всеки терм в основен терм (ground term, терм, който няма променливи), т.е. всяко такова присвояване подготвя термовете, за да могат с тях да работят автоматите.

Нека $t \in W_\tau(X)$, $\gamma \in Ass(Y, \mathcal{F}_0)$ и $Y = \{x_1, \ldots, x_m\}$. С $\gamma(t)$ ще означаваме термът $\gamma(t) = t(x_1 \leftarrow \gamma(x_1), \ldots, x_m \leftarrow \gamma(x_m))$.

Автоматът $\mathcal{A} = \langle Q, \mathcal{F}, Q_f, \Delta \rangle$ работи върху терма t с присвояването γ. Той стартира от листата на t и продължава надолу към корена, присвоявайки на всяко срещнато поддърво по едно състояние, съгласно правилата за преход на автомата, както следва:

(i) Ако $Depth(t) = 0$, то

$$\mathcal{A}(\gamma, t) := \begin{cases} \Delta_0(\gamma(x)) & \text{ако} \quad t = x \in X; \\ \Delta_0(f_0) & \text{ако} \quad t = f_0 \in \mathcal{F}_0. \end{cases}$$

(ii) Ако $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ и състоянията $q_1, \ldots, q_n$ са присвоени на поддърветата $t_1, \ldots, t_n$, то тогава $\mathcal{A}(\gamma, t) := \Delta_n(f, q_1, \ldots, q_n)$.

Един терм t, $t \in W_\tau(X)$ *се допуска (разпознава) (е разпознаваем)* от един автомат $\mathcal{A} = \langle Q, \mathcal{F}, Q_f, \Delta \rangle$, ако съществува присвояване γ, така че при работата си над дървото t и γ, автоматът $\mathcal{A}$ присвоява на t някое заключително състояние $q \in Q_f$.

Когато $\mathcal{A}$ присвоява състоянието q на подтерма s, ще пишем $\mathcal{A}(\gamma, s) = q$.

Определение 3.1.2 Нека $t \in W_\tau(X)$ и нека $\mathcal{A}$ е автомат. Една променлива $x_i \in var(t)$ се нарича *съществена* за двойката $(t, \mathcal{A})$, ако съществуват две присвоявания $\gamma_1, \gamma_2 \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$ така, че

$\gamma_1(x_i) \neq \gamma_2(x_i), \quad \gamma_1(x_j) = \gamma_2(x_j),$ за всяко $j,\ j \neq i,$ като $\mathcal{A}(\gamma_1, t) \neq \mathcal{A}(\gamma_2, t),$

т.е. $\mathcal{A}$ завършва своята работа в две различни състояния, когато работи върху t с γ_1 и с γ_2.

Множеството от всички съществени входове за $(t, \mathcal{A})$ се означава с $Ess(t, \mathcal{A})$. Входните променливи от $var(t) \setminus Ess(t, \mathcal{A})$ се наричат *фиктивни* за $(t, \mathcal{A})$.

Лема 3.1.2 Нека $t, s \in W_\tau(X)$. Ако $x_i \notin Ess(t, \mathcal{A})$ и за всяко $q \in Q$, съществува $f_0 \in \mathcal{F}_0$, такова, че $\Delta_0(f_0) = q$, то $\mathcal{A}(\gamma, t) = \mathcal{A}(\gamma, t(x_i \leftarrow s))$, за всяко $\gamma \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$.

Описани са правила, с които се отстраняват фиктивните входове на дадено дърво и то се превръща в оптимално (минимално) за дадения автомат. Тези правила сме обозначили като RFI-правила (Restriction of fictive inputs).

От изчислителна гледна точка е важно да можем да построяваме от произволна двойка автомат-език, еквивалентна на нея двойка, която се състои от минимален автомат [53, 74] и минимален език.

Съществува един случай, когато тази задача има ефективно решение.

В [53, 74] е доказано, че проблемът за "крайност" на езиците от дървета, разпознавани от автомати е ефективно разрешим, т.е. съществува алгоритъм, който да означим с FA, така че за всеки автомат $\mathcal{A}$, този алгоритъм дава отговор на въпроса: Дали езикът от дървета $L(\mathcal{A})$ е краен или не?

Процедурата за намиране на език от минимални дървета, е описана, чрез стъпките, посочени в следната последователност:

1. Използваме FA, за да получим отговор на въпроса дали $L(\mathcal{A})$ е краен език или не?

2. Използваме алгоритъм [53], за да получим минимален автомат $\mathcal{A}_{min}$, който е еквивалентен на $\mathcal{A}$ т.е. $L(\mathcal{A}_{min}) = L(\mathcal{A}) = L$.

3. Ако $L(\mathcal{A})$ е краен, тогава използваме RFI-правила за получаване на минимален език $L_{min} \sim L(\mathcal{A})$, относно автомата A.

`4. Двойката` $\langle \mathcal{A}_{min}, L_{min} \rangle$ `е оптимална двойка автомат-език.`

Определение 3.1.7 Нека $t \in W_\tau(X)$ и $\mathcal{A}$ да бъде един автомат. Една входна променлива $x_i \in var(t)$ се нарича *разпознаваемо съществена (r-съществена)* за двойката $(t, \mathcal{A})$ ако съществуват две присвоявания $\gamma_1, \gamma_2 \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$ така, че $\gamma_1(x_i) \neq \gamma_2(x_i)$ и за всяко $x_j \in X,\ j \neq i$ и $\gamma_1(x_j) = \gamma_2(x_j)$ е в сила

$$\mathcal{A}(\gamma_1, t) \in Q_f \iff \mathcal{A}(\gamma_2, t) \notin Q_f,$$

т.е. $\mathcal{A}$ спира в заключително състояние само с едно от присвояванията γ_1 или γ_2.

Множеството от всички $r-$съществени входове за $(t, \mathcal{A})$ ще означаваме с $rEss(t, \mathcal{A})$. Променливите от $var(t) \setminus rEss(t, \mathcal{A})$ ще наричаме *r-фиктивни* за $(t, \mathcal{A})$.

Очевидно, ако $Q_f = Q$ или $Q_f = \emptyset$, то за всяко $t \in W_\tau(X)$ е в сила $rEss(t, \mathcal{A}) = \emptyset$. По-натаък този случай няма да разглеждаме, поради неговата тривиалност.

По аналогичен начин, по-голямата част от резултатите, доказани за съществени входове, могат да се докажат и за $r-$съществените.

Теорема 3.1.3 Нека $\mathcal{A}$ е автомат, работещ с дървета. Тогава са в сила:

(i) Ако за всяко $\gamma \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$ имаме

$$\mathcal{A}(\gamma, t') \in Q_f \iff \mathcal{A}(\gamma, t) \in Q_f,$$

то $rEss(t, \mathcal{A}) = rEss(t', \mathcal{A})$;

(ii) Ако $t \in W_\tau(X)$, то $rEss(t, \mathcal{A}) \subset Ess(t, \mathcal{A})$;

(iii) Ако променливата x_i е фиктивна за t и $\mathcal{A}$, то x_i е $r-$фиктивна за t и $\mathcal{A}$.

Определение 3.1.9 Нека $t \in W_\tau(X)$ и нека $\mathcal{A}$ е автомат, работещ с дървета и $M \subseteq Ess(t, \mathcal{A})$ $(M \neq \emptyset)$. Една входна променлива $x_i \in M$ се нарича *силно съществена* за двойката $(t, \mathcal{A})$, относно множеството M, ако съществува константа $f_0 \in \mathcal{F}_0$, за променливата x_i, такава, че $M \setminus \{x_i\} \subseteq Ess(t(x_i \leftarrow f_0), \mathcal{A})$.

Променливите, които са силно съществени относно M при $M =$

$Ess(t, \mathcal{A})$ ще наричаме силно съществени за $(t, \mathcal{A})$.

Тук сме доказали аналог на една много важна теорема за дискретни функции (Теорема 1.1 [17]), доказана за различни случаи от О. Лупанов [5], Н. Соловьов [12], A. Salomaa [97] и в общия случай от К. Чимев [17]).

Теорема 3.1.4 Нека $t \in W_\tau(X)$ е едно дърво от тип τ и нека $\mathcal{A}$ е един автомат. Ако $|Ess(t, \mathcal{A})| \geq 2$, то съществува поне една входна променлива на t, която е силно съществена за $\langle t, \mathcal{A} \rangle$.

Определение 3.1.10 Едно множество $Y \subseteq Ess(t, \mathcal{A})$ от съществени входни променливи, се нарича *отделимо* за t и $\mathcal{A}$, относно множеството от съществени входове $Z \subseteq Ess(t, \mathcal{A})$, за което $Z \cap Y = \emptyset$, ако съществува присвояване γ на Z така, че $Y \subseteq Ess(\gamma(t), \mathcal{A})$.

Съвкупността от всички отделими множества от входове за t и $\mathcal{A}$, относно Z, ще означаваме с $Sep(t, \mathcal{A}, Z)$. Когато множеството Y е отделимо за t и $\mathcal{A}$, относно $Z = Ess(t, \mathcal{A}) \setminus Y$, то се натича *отделимо* за t и $\mathcal{A}$. Съвкупността на такива Y ще означаваме с $Sep(t, \mathcal{A})$. Когато едно множество от съществени входове не е отделимо ще го наричаме *неотделимо* за t и $\mathcal{A}$.

Теорема 3.1.6 Ако $\mathcal{A}(\gamma, t_1) = \mathcal{A}(\gamma, t)$ е в сила , за всяко $\gamma \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$, то $Sep(t, \mathcal{A}) = Sep(t_1, \mathcal{A})$.

Лесно е да се покаже, че ако $t < s$ са дървета за които $\mathcal{A}(\gamma, t) = \mathcal{A}(\gamma, s)$ за всяко $\gamma \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$, то резултите от работата на автомата $\mathcal{A}$ над t и s ще бъдат едни и същи, но изпълнението върху t ще бъде "по-бързо" от това над s, поради $t < s$.

Определение 3.1.15 Нека $t \in W_\tau(X)$ и $\mathcal{A}$ е автомат, работещ с дървета. Едно поддърво (подтерм) на $sub_t(p)$, $p \in Pos(t)$ се нарича *съществено (съществен)* за двойката $(t, \mathcal{A})$ ако съществуват две присвоявания $\gamma_1, \gamma_2 \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$, такива, че $\mathcal{A}(\gamma_1, sub_t(p)) \neq \mathcal{A}(\gamma_2, sub_t(p))$, и $\gamma_1(x_j) = \gamma_2(x_j)$ за всяко $x_j \in X \setminus var(sub_t(p))$ и $\mathcal{A}(\gamma_1, t) \neq \mathcal{A}(\gamma_2, t)$.

Множеството от всички съществени поддървета за двойката $(t, \mathcal{A})$ ще означаваме с $TEss(t, \mathcal{A})$.

Една позиция $p \in Pos(t)$ се нарича *съществена* за (относно) двойката $(t, \mathcal{A})$, ако $sub_t(p) \in TEss(t, \mathcal{A})$. С $PEss(t, \mathcal{A})$ ще означаваме множеството на всички съществени позиции на t относно $(t, \mathcal{A})$. Аналогично, позициите от множеството $Pos(t) \setminus PEss(t, \mathcal{A})$ ще наричаме *фиктивни* за $(t, \mathcal{A})$.

Да положим $Ess(t, \mathcal{A}) := TEss(t, \mathcal{A}) \cap X$. Елементите на множеството $Ess(t, \mathcal{A})$, както вече стана дума по-горе се наричат съществени входни променливи за t и $\mathcal{A}$. Свойствата на съществените променливи на дървета и автомати бяха описани по-горе и са публикувани в [143].

На базата на тези понятия сме дефинирали изчислителна сложност на произволна двойка автомат-дърво, а също така е разработена методика за намаляване на тази сложност, когато това е възможно.

Термовете, разглеждани като дървета са едно много полезно средство за представяне и манипулиране на различни структури от данни в компютърните науки и информационните технологии. С изучаването на съществените поддървета, относно даден автомат се цели да се разкрият предимно разнообразните им приложения в компютърните системи и по-специално в XML-програмирането.

Често автоматите изразходват много време да обработват дървета, в които е структурирана излишна и безполезна информация. Най-често това означава, че някои входове или поддървета (поддокументи) са фиктивни за дадения автомат и неговата работа върху такива "парчета" от дървото е неефективна.

През последните години, за преодоляване на тези проблеми се появиха различни средства и техники, като XML-QL, XSLT, XQL и др., отнасящи се до модели на полуструктурирани данни и документи [39, 40].

Обикновено в този контекст се използват списъци от дървета, като напълно естествени рекурсивни структури от данни, за описание и представяне на структурирани и полуструктурирани документи. Такива документи се моделират като етикетирани дървета с наредени наследници. Следвайки тази линия на изследване, ще фокусираме вниманието си върху съществените (не-фиктивни) части (поддокументи (поддървета)) на документите (дърветата), относно автоматите (компютрите), работещи върху тези документите (дърветата).

Да разгледаме XML-документа, представен на Фигура 3.8, който задава един Булев израз. Да отбележим, че булевите изрази играят ключова роля в програмирането за разклоняване на алгоритми и програми, за моделиране, за описание на алгоритми и т.н.

```
<?xml version="1.0"?>
  <dis pos="ε”>
    <neg pos="1”>
      <op1>$x_1$</op1>
    </neg>
    <con pos="2” >
      <dis pos="21” >
        <op2>$x_2$</op2>
        <con pos="212” >
          <op3>$x_3$</op3>
          <op2>$x_2$</op2>
        </con>
      </dis>
      <neg pos="22” >
        <op1>$x_1$</op1>
      </neg>
    </con>
  </dis>
```

Фигура 3.8 Представяне на булев израз

Да разгледаме следното дърво:

$$t = \texttt{dis(neg(}x_1\texttt{),con(dis(}x_2\texttt{,con(}x_3, x_2\texttt{)),neg(}x_1\texttt{)))}$$

представено от документа на Фигура 3.8.

Да отбележим, че езиците за представяне на булеви, аритметични, алгебрични, регулярни и други рекурентно дефинирани изрази е основна част от програмната среда за много алгоритмични езици и по-конкретно те са в ядрото на компилаторите за тези езици.

XML документите обикновено се описват със специален фрагмент в самия документ или с отделен файл. Такова описание е мотивирано от стандартната спецификация за HTML документите, наречена Document Type Definitions (DTD). Разликата е, че DTD при XML не е стандарт, а средство за управление на интерпретацията и валидизацията на самите документи.

Формалната дефиниция на DTD, може да се направи също с апарата на крайните автомати, работещи с дървета.

XML документът от Фигура 3.8 може да бъде описан със следния автомат $\mathcal{A}$, представляващ DTD за този документ:

```
<!DOCTYPE dis[
<!ELEMENT dis(neg.con+op2.con)>
<!ELEMENT con(dis.neg+op3.op2)>
<!ELEMENT neg(op1)>
<!ELEMENT op1(#PCDATA)>
<!ELEMENT op2(#PCDATA)>
<!ELEMENT op3(#PCDATA)>
<!ATTLIST con pos CDATA>
<!ATTLIST dis pos CDATA>
<!ATTLIST neg pos CDATA>
]
```

Фигура 3.11 DTD за XML документът от Фигура 3.8

Съответният на поддървото $sub_t(1)$ XML-документ е представен на Фигура 3.12.

```
<?xml version="1.0"?>
  <neg pos="1">
    <op1>x1</op1>
```

</neg >

Фигура 3.12 XML-документ за $t|_1$

Така, дефинициите (DTD) за документите на Фигури 3.8 и 3.12 показват, че при работата на компютъра върху тези документи ще достигне до едно и също състояние?! Това означава, че поддървото (поддокумента) $sub_t(2)$ не е съществено за t, т.е. $\mathcal{A}(\gamma, sub_t(1)) = \mathcal{A}(\gamma, t)$ за всяко γ.

За да илюстрираме ролята на отделимите множества в XML технологиите, нека да разгледаме следния XML документ, представящ логическия израз $\texttt{sum}(\texttt{con}(x_1, x_2), \texttt{con}(\texttt{neg}(x_1), x_3))$ и представен на Фигура 3.13.

<?xml version="1.0"?>
<sum pos="ε">
<con pos="1">
<op1>x_1</op1>
<op2>x_2</op2>
</con>
<con pos="2" >
<neg pos="21" >
<op1>x_1</op1>
</neg>
<op3>x_3</op3>
</con>
<sum>

Фигура 3.13 XML документ за логическия израз (term)
$\texttt{sum}(\texttt{con}(x_1, x_2), \texttt{con}(\texttt{neg}(x_1), x_3))$

Да разгледаме автомат $\mathcal{A}$, който реализира един DTD за този документ, като $\mathcal{F} := \{\texttt{sum}, \texttt{con}, \texttt{neg}, 1, 0\}$, $Q := \{q_0, q_1\}$, $Q_f := \{q_1\}$ и

$\Delta_1(\texttt{neg}, q_0) = q_1, \ \Delta_1(\texttt{neg}, q_1) = q_0;$

$$\Delta_2(\texttt{sum}, q_i, q_j) = \begin{cases} q_0 & \text{ако} \quad q_i = q_j; \\ q_1 & \text{в останалите случаи,} \end{cases}$$

$$\Delta_2(\texttt{con}, q_i, q_j) = \begin{cases} q_1 & \text{ако} \quad q_i = q_j = q_1; \\ q_0 & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

и $\Delta(0) := q_0,\ \Delta(1) := q_1$.

Сега не е трудно да се види, че множеството $\{x_2, x_3\}$ не е отделимо за t и $\mathcal{A}$. Следователно, като използуваме RPC(Remote Procedure Call) интерпретацията (изпълнението) на XML документа от Фигура 3.13, той може да се реализира със следния RPC-фрагмент:

```
if op1=1 then
<?xml version="1.0"?>
  <op2>x2</op2>
        else
<?xml version="1.0"?>
  <op3>x3</op3>
```

Фигура 3.14 Фрагментиране на XML документ

Този фрагмент, очевидно е значително по прост от XML документа представен на Фигура 3.13, а неговия DTD изглежда още по-просто

```
<!DOCTYPE dis[
<!ELEMENT op2(#PCDATA)>
<!ELEMENT op3(#PCDATA)>
]
```

Въвели сме понятието за логически автомати с дървета и за тях е доказана следната теорема.

Теорема 3.1.14 Всички входни променливи са съществени за почти всички n-членни дървета и логически автомати.

За дискретни функции аналогична теорема е доказана от Й. Денев и И. Гюдженов [3].

3.2 Преобразователи на оцветени дървета

При преобразователите, резултатът от работа на един автомат е едно ново дърво, което е образ на изходното при дадения преобразовател. По такъв начин на едно множество от дървета (език) се съпоставя друг език от дървета.

Съществуват различни подходи за дефиниране на преобразователи. Ние ще използваме преобразователи, които интерпретират (автоматизират) прилагането на мулти-хиперсубституциите.

Определение 3.2.2 Нека $M \subseteq Hyp(\tau)$ е моноид от хиперсубституции и ρ е една мулти-хиперсубституция от $MHyp(\tau, M)$. Един автомат-преобразовател $\underline{A}^\rho = \langle \mathcal{F}^c, X, P, \rho \rangle$, се нарича *Mh-преобразовател,* ако правилата му са от вида:
(i) $x \to x,\ x \in X$;
(ii) $\langle f(\xi_1, \cdots, \xi_n), q \rangle \to \langle r(\xi_1, \cdots, \xi_n), \alpha_r \rangle$,
къдeто $\langle r(\xi_1, \cdots, \xi_n), \alpha_r \rangle \in W_\tau^c(X \cup \chi_m)$, $\langle f, q \rangle \in \mathcal{F}^c$, $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \chi_n$,
като $r = \rho(q)(f)$ и $\alpha_r(p) = q$ за всяко $p \in Pos^{\mathcal{F}}(r)$.

(Всички спомагателни променливи ξ_j принадлежат на едно множество $\chi_m = \{\xi_1, \cdots, \xi_m\}$, където $m = maxar$ е максималната членност измежду всички операционни символи от $\mathcal{F}$, като $\xi_m \cap X = \emptyset$.)

Очевидно правилата в P за такъв автомат се определят напълно от мулти-хиперсубституцията ρ.

За дърветата $\langle t, \alpha_t \rangle$, и $\langle s, \alpha_s \rangle$ ще казваме, че $\langle s, \alpha_s \rangle$ *непосредствено се получава (следва, се извежда)* от $\langle t, \alpha_t \rangle$ с Mh-преобразователя $\underline{A}^\rho$, ако $\langle s, \alpha_s \rangle$ може да се получи от $\langle t, \alpha_t \rangle$, чрез:

- замяна на поддървото $\langle f, q \rangle(\langle r_1, \alpha_{r_1} \rangle, \cdots, \langle r_n, \alpha_{r_n} \rangle)$, на $\langle t, \alpha_t \rangle$ със $\langle s, \alpha_s \rangle(\langle r_1, \alpha_{r_1} \rangle, \cdots, \langle r_n, \alpha_{r_n} \rangle)$, ако $\langle f(\xi_1, \ldots, \xi_n), q \rangle \to \langle s(\xi_1, \cdots, \xi_n), \alpha_s \rangle \in P$,

където $s = \rho(q)(f)$ и $\alpha_s(p) = q$ за всяко $p \in Pos^{\mathcal{F}}(s)$;

- или $\langle s, \alpha_s \rangle = \langle t, \alpha_t \rangle$.

Когато $\langle s, \alpha_s \rangle$ непосредствено следва от $\langle t, \alpha_t \rangle$, чрез Mh-преобразователя $\underline{A}^\rho$, ние ще пишем $\langle t, \alpha_t \rangle \to_{\underline{A}^\rho} \langle s, \alpha_s \rangle$.

С $\Rightarrow^*_{\underline{A}^\rho}$ ще означаваме рефлексивната и транзитивна обвивка на релацията $\to_{\underline{A}^\rho}$.

С $Thyp(\tau, M)$ означаваме множеството от всички $Mh-$преобразователи на дървета от тип τ.

Казваме, че един оцветен терм (дърво) $\langle t, \alpha_t \rangle$ *се преобразува (транслира)* в терма (дървото) $\langle s, \alpha_s \rangle$, чрез $Mh-$преобразователя $\underline{A}^{\rho}$, ако съществува такова изпълнение на $\underline{A}^{\rho}$, че той присвоява на корена на $\langle t, \alpha_t \rangle$ оцветеното дърво $\langle s, \alpha_s \rangle$. Това ще означаваме с $\underline{A}^{\rho}(\langle t, \alpha_t \rangle) = \langle s, \alpha_s \rangle$.

Произведението (суперпозицията) на два $Mh-$преобразователи $\underline{A}^{\rho_1}$ и $\underline{A}^{\rho_2}$ се определя със следното равенство, което е в сила за всеки оцветен терм $\langle t, \alpha_t \rangle$,

$$\underline{A}^{\rho_1} \circ \underline{A}^{\rho_2}(\langle t, \alpha_t \rangle) := \underline{A}^{\rho_1}(\underline{A}^{\rho_2}(\langle t, \alpha_t \rangle)).$$

Теорема 3.2.1 Нека $M \subseteq Hyp(\tau)$ е един моноид от хиперсубституции. Тогава

(i) Суперпозицията на $Mh-$преобразователи е асоциативна, т.е.

$$\underline{A}^{\rho_1} \circ (\underline{A}^{\rho_2} \circ \underline{A}^{\rho_3})(\langle t, \alpha_t \rangle) = (\underline{A}^{\rho_1} \circ \underline{A}^{\rho_2}) \circ \underline{A}^{\rho_3}(\langle t, \alpha_t \rangle)$$

за всеки $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in Mhyp(\tau, M)$ и за всяко $\langle t, \alpha_t \rangle \in W^c_\tau(X)$
и

(ii) Множеството $Thyp(\tau, M)$ е моноид, който е изоморфен на моноида от всички мулти-хиперсубституции над M т.е.

$$Thyp(\tau, M) \cong Mhyp(\tau, M).$$

За произволна мулти-хиперсубституция ρ да означим с $Im(\rho)$ множеството от хиперсубституциите, които са образи на естествени числа при ρ, т.е.

$$Im(\rho) = \{\sigma \in Hyp(\tau) \mid \exists q \in \mathbb{N}\, (\rho(q) = \sigma)\}.$$

Определение 3.2.3 Нека ρ_1 и ρ_2 са две мулти-хиперсубституции от тип τ. Ще казваме, че ρ_1 предхожда ρ_2 и ще пишем $\rho_1 \prec \rho_2$, ако $Im(\rho_1) \subseteq Im(\rho_2)$.

Очевидно, $\prec$ е частична наредба в множеството $Mhyp(\tau, M)$. Поради свойството "асиметричност" на това отношение, напълно естествено се дефинира следната еквивалентност.

Определение 3.2.4 Нека ρ_1 и ρ_2 са две мулти-хиперсубституции от тип τ. Ще казваме, че ρ_1 и ρ_2 са еквивалентни и ще пишем $\rho_1 \equiv \rho_2$, ако $Im(\rho_1) = Im(\rho_2)$.

Теорема 3.2.2 Две мулти-хиперсубституции ρ_1 и ρ_2 от тип τ са еквивалентни точно тогава когато за всеки терм $t \in W_\tau(X)$ и за всяко оцветяване $\alpha_t \in C_t$, съществува оцветяване $\beta_t \in C_t$, за което $\overline{\rho}_1[\langle t, \alpha_t \rangle] = \overline{\rho}_2[\langle t, \beta_t \rangle]$.

Авторска справка

Основните приноси на дисертацията са постигнати в три направления: Теория на дискретните функции, Теория на универсалните алгебри и Теория на автоматите. Те са описани в дисертацията, като на всяко едно от тези направления съответствува по една част от дисертацията.[1]

1. Приноси в теория на дискретните функции

В това направление основните приноси се състоят в продължаване на изследванията, развивани в школата по дискретна математика в Благоевград и предишната дисертация на автора.

1. Получени са обобщения и усилвания на Теорема 4.10, Теорема 5.2, и Теорема 5.2, от [133].

2. Въедени са и се изучават свързани множества, индекси на същественост и отделимост на множествата от променливи [136] с помощта на които са усилени редица резултати от предишната дисертация на автора.

3. Усилена са две теореми, отнасящи се до доминиращи множества, като е използвано в условието по-слабото изискване те да са свързани. Доказано е, че ако M и N са две свързани множества, то: $M \cup N \in Sep(f)$, за всяко $x_i \in M$ съществува $x_j \in N$, така че $\{x_i, x_j\} \in Sep(f)$ и за всяко $x_j \in N$ съществува $x_i \in M$, така че $\{x_i, x_j\} \in Sep(f)$.

4. Усилен е един забележителен резултат на проф. К.Чимев (Теорема 2.3 [17]), като е доказано, че когато $M \notin Sep(f)$, то променливата x от множеството $Ess(f) \setminus M$ може да се избере преди избора на

[1] Номерацията на Определенията, Теоремите и други цитирани резултати в тези справки са взети същите, каквито са в самата дисертация.

променливите $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ и константите $c_{i_1}, \ldots, c_{i_t}$.

5. Дадено е още едно доказателство на теоремата за съществуване на s-система за произволна фамилия от непразни множества. Показано е, че s-системите са минимални системи от представители на множествата.

6. Изучени са някои от свойствата на променливите от множеството $Sfr(f)$, които сами представляват свободни множества. Това всъщност са "променливите", които имат на максимална сложност за дадена функция. Намерени са достатъчни условия, кога една променлива е от този вид.

7. В дисертацията са получени и някои нови резултати за s-системите, Шпернеровите фамилии и тяхното приложение.

2. Приноси в теория на универсалните алгебри

В това направление научните достижения в дисертацията се отнасят до едни от най-общите обекти в алгебрата - термовете, но отново в светлината на същественост и отделимост. Този по-общ подход ни дава възможност да въведем и да изучаваме тези свойства не само за променливи, а и за подтермове (поддървета) и позиции.

1. За първи път в [144] въвеждаме съществена променлива и отделимо множество за термове. Изучени са някои от основните свойства на тези обекти (Теореми 2.1.1 и 2.1.2).

2. Изучени са някои нови мерки за сложност на термове, които се базират на свойствата отделимост и същественост на променливите. Получен е каталог на термовете за конкретна алгебра, както и някои оценки за общия случай (Теорема 2.1.3).

3. Въвеждаме и изучаваме три нови подхода за композиция на термове - индуктивна, позиционна и Σ-композиция. Чрез тези композиции са доказани редица нови твърдения в общата теория на многообразията.

4. Въведени са три нови дедуктивни системи - $SR(\Sigma)$, $TSR(\Sigma)$ и $\Sigma R(\Sigma)$, и е доказано, че те пораждат две нови теории с тъждества (напълно инвариантни конгруенции). Това дава възможност за по-пълно изучаване на решетката от всички многообразия от даден тип.

5. Доказано е, че:

(i) $SR(\Sigma)$ е напълно инвариантна конгруенция и $SR(\Sigma) = D(\Sigma)$;

(ii) $\Sigma R(\Sigma)$ е напълно инвариантна конгруенция, но $D(\Sigma) \neq \Sigma R(\Sigma)$ в общия случай;

(iii) $TSR(\Sigma)$ е глобално инвариантна конгруенция, но $\Sigma R(\Sigma) \neq TSR(\Sigma)$ в общия случай.

6. По аналогия с класическия случай, тук са въведени Σ-балансирани тъждества. Доказано е, че Σ-композициите запазват свойството Σ-балансираност на тъждествата.

7. Доказано е, че съществуват солидни многообразия, които не са стабилни и обратно съществуват стабилни многообразия, които не са солидни. (Теорема 2.3.2 [147, 148])

8. Доказани са редица свойства на пълните термове и хиперсубституции, с които е получена формула за дълбочината на образа $\hat{\sigma}[t]$ на даден терм при дадена хиперсубституция (Теорема 2.3.5, [146]). Разработена е процедура с която по зададена хиперсубституция и терм се намира дълбочината на образа на този терм при тази хиперсубституция.

9. Доказано е, че хиперсубституциите, които са "субституции" образуват подмоноид на $Hyp(\tau)$. Разгледани са и някои "нехомоморфни" разширения на хиперсубституции и техните приложения в компютърните науки. ([145]).

10. Като обобщение на хиперсубституциите са въведени мулти-хиперсубституциите (Определение 2.4.1 [146]). Доказано е, че те образуват моноид и пораждат операторите $\chi_C[\Sigma]$ и $\psi_C[\mathcal{R}]$. Установяваме, че тези оператори, когато работят върху еднократно оцветени термове не пораждат връзка (релация) на Галоа (Теорема 2.4.1).

11. Изучено е множеството $W_\tau^c(X)$ от всички оцветени термове от

даден тип. По аналогия със статичния случай [146] на едно оцветяване и тук са въведени затварящите оператори $\chi^c_M[\Sigma]$ и $\psi^c_M[\mathcal{R}]$. Доказано е, че тези оператори сега образуват връзка на Галоа(Теорема 2.4.12 и Твърдение 2.4.9).

12. Получени са достатъчни условия, кога $\chi^c_M[\Sigma]$ е пред-пълна конгруенция (Теорема 2.4.16).

13. Показано е, че когато моноида M е краен, то работата на мулти-хиперсубституциите над M може да се интерпретира (замени) с работата на подходящо избрани обикновени хиперсубституции, само че от по-сложен тип (Теорема 2.4.11).

3. Приноси в теория на автоматите

1. Предложени са модели за успешната реализация и приложение в съвременните информационни технологии на повечето от понятията, изучени в първите две части - съществени входове, отделими и дистрибутивни множества и др. Изучено е влиянието на тези понятия върху сложността на някои процедури в информатиката.

2. Изучени са основните свойства на съществените променливи (входове) за даден автомат, на съществени поддървета и отделими множества от дървета за даден автомат. На тази база се разглежда една нова процедура за опростяване на работата на автоматите с дървета.

3. Разработени са процедури за за премахване или добавяне на несъществени (фиктивни) входове за дървета. От тази гледна точка, добиваме възможност за един нов поглед върху минимизацията на автомати и езици с дървета. Такава минимизация е реализирана с подходящи процедури (алгоритми). Това е особено актуално за развитието на съвременните технологии за обмен на структурирани документи, тъй като най-често тези документи съдържат много излишна информация.

4. Тези теоретични разработки са реализирани в XML-технологиите

и за техните дефиниции DTD, които са специален вид автомати с дървета.

5. Показано е, че ако един XML-документ има не съществени поддокументи (поддървета), той може да се представи значително по-компактно. Също такова опростяване може да се постигне и ако в него има неотделими множества от входове.

6. Доказано е, че за логическите автомати (състоянията на които са елементи на к-значната логика) почти всички техни входове са съществени.

7. Изучаваме автомати-преобразователи на дървета, които черпят своите правила за преобразуване на базата на мулти-хиперсубституции. Доказано е, че множеството от такива преобразователи е моноид, който е изоморфен на моноида $Mhyp(\tau, M)$.

4. Редакция на научни сборници, годишници и конференции

1. През 90-те години на миналия век положихме с проф. К. Чимев началото на традиционна международна конференция в областта на дискретната математика - International Conference on Discrete Mathematics and Applications (ICDMA). До сега са проведени 7 такива конференции, като на последните 4 от тях съм председател на Организационния комитет и съм редактор на сборниците от доклади (`http://www.icdma.swu.bg/`) [151, 153, 154, 155, 156]. Всички работи в тези сборници са публикувани след строго (най-често чуждестранно) рецензиране. По-голямата част от тях са реферирани в трите големи световни журнали за референции - РЖ, MR и Zbl.

2. Отговорен редактор съм на томовете по математика на годишника на Югозападния Университет. Обикновено този годишник излиза в годините когато не се провеждат конференциите ICDMA.

3. През 2003 организирах секция с доклади по покана на тема "Universal Algebra, Tree Automata and XML-Data" на 7th World Multi Confer-

ence on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI 2003), July 27 - 30, 2003, Orlando, Florida, USA [152].

5. Публикации, референции и цитирания

Основните резултати от дисертацията са получени в периодите 1987-1991 и 2001-2006. През първия от двата периоди продължавам работа върху тематиката за отделимост на множества при дискретни функции, т.е. основно тук са получени резултатите в първата част на дисертацията. По-голямата част от тези резултати са докладвани на редица международни и национални конференции и са публикувани главно в авторитетни издания на Унгарската Академия на Науките, Българската Академия на Науките, Съюза на Математиците в България, Югозападен Университет, Висшите Технически Училища и др. ([7, 8, 24, 121, 26, 27, 126, 29, 122, 123, 124, 125, 98, 127, 128, 129, 130, 50, 51, 131, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 33, 25, 34]).

В последствие от 1992 до 2003 година поради голямата ми административна заетост, като декан на Природоматематическия факултет, липсват сериозни научни публикации.

От 2000 година, повлиян от активното научно сътрудничество с колеги от Германия, моите интереси се насочиха към Универсалните алгебри и Теория на автоматите. Повечето от резултатите от този период са докладвани на конференциите от сериите ICDMA (България), [151, 153, 154, 155, 156] и AAA (Германия) [161, 162, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172], както и на някои други международни форуми [152, 163, 166].

Работите от дисертацията са публикувани в издания в: България, Германия, Унгария, Австрия, САЩ, Украйна, Македония, и.др.

Повечето от докладваните резултати са публикувани или приети за публикуване в международни издания ([139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 145, 147, 148]).

С изключение на последните две работи, всики останали са публикувани, а [147] и [148] са в процес на рефериране и корекции за публикуване в два известни в тази област журнала.

Двадесет и седем от тези работи са реферирани в Mathematical Reviews, шестнадесет - в Zentralblatt MATH, а за броя на реферираните в Реферативний журнал (Москва), за сега нямам информация.

Статията [144] има 12 цитирания, а [140] - 9. Монографията [133] има поне 7 цитирания. Общо, резултатите от дисертацията се цитират в:

- книгите [19, 20, 21, 69, 46]

- статиите [48, 60, 61, 71, 91]

- докладите [151, 153, 154, 155, 156], http://www.icdma.swu.bg/

- дисертациите [6, 86]

- електронните архиви -`www.arXiv.org`, `www.ams.org/mrlookup`, `http://zmath.impa.br/`.

В Теорията на дискретните функции ме въведе професор Кирил Чимев. Под негово ръководство през 1986 година защитих кандидатската си дисертация на тема "Върху доминиращите и анулиращите множества от променливи на функциите". Сътрудничеството ми с него продължава и до днес. За всичко това му изказвам моята най-сърдечна благодарност. През 1990 година под мое ръководство бе защитена дисертацията "Отделими и доминиращи множества от променливи на функциите" от Иван Мирчев [6]. Благодарен съм му за неговата устремна и успешна работа в тази област. Благодарен съм и на Й. Денев, Р. Павлов, И. Гюдженов, М. Аслански, К. Тодоров, Д. Ковачев, И. Атанасова, И. Дамянов, Е. Каращранова, Б. Юруков и др., с които многократно сме дискутирали различни проблеми от настоящата дисертация. Благодарност и на моите чуждестранни колеги Клаус Денеке, Йорг Копитц (Потсдам), Рейнхард Пьошел (Дрезден), Ева Гражинска (Ополе), Александър Сапоженко (Москва), Гари П. Гаврилов (Москва), Казимеж Глазек (Зельона Гура), Дитмар Швейгерт (Кайзерслаутерн), Я. Деметрович, З. Ешик (Унгария) и др. с които имах прекрасни дискусии, многогодишно, полезно и великолепно научно сътрудничество.

Благодарен съм и на моето семейство - Елена, Веска и Владимир. Без тяхната обич и разбиране, моят дисертационен проект би бил невъзможен.

Литература

Заглавия, цитирани в автореферата

[1] Ю. Брейтбарт. *О существенных переменных функции алгебры логики,* Доклады АН СССР, 172, 1, 1967, 9-10.[2]

[3] Й. Денев, И. Гюдженов,*О выделимых подмножестваъ аргументов функций из P_k,* Tanulmanyok–MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, No. 147, (1984), pp. 47-50.

[5] О. Б. Лупанов,*Об одном классе схем из функциональных елементов,* Проблемы кибернетики, вып. 7, 1962, 61-114.

[6] Ив. Мирчев, *Отделими и доминиращи множества от променливи на функциите,* Дисертация, София, 1991.

[7] Ив. Мирчев, Сл. Щраков, Б. Юруков, *Свойства на максимално отделимите множества,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. VI, книга 1, 1989, 78-92.

[8] Р. Павлов, Сл. Радев, Сл. Щраков, *Математически основи на информатиката,* Благоевград, 1996, 265 стр.

[2]Номерацията и тук е същата, както в дисертацията.

[12] Н. Соловьев, *К вопросу о существенной зависимости функции алгебры логики,* Проблемы кибернетики, вып. 9, 1963, 333-335.

[17] К. Чимев, *Отделими множества от аргументи на функциите,* Благоевград, 1982, 201 р.

[19] К. Чимев, Ил. Гюдженов, *Подфункции и мощност на някои класи от функции,* Благоевград, 1987, 218 р.

[20] К. Чимев, *Дискретни функции и подфункции,* Благоевград, 1991, 258 р.

[21] К. Чимев, *Отделими множества от променливи на функциите,* Благоевград, 2005, 120 р.

[24] Сл. Щраков, *Върху доминиращите и анулиращите множества от променливи на функциите,* Дисертация, (Автореферат) 1985, София.

[25] Сл. Щраков, *Анулиращи множества от съществени променливи на функциите,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. I, книга 1, 1984, 91-97.

[26] Сл. Щраков, *Върху някои свойства на доминиращите множества,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. II, книга 1, 1985, 79-87.

[27] Сл. Щраков, *Върху s-системите на фамилии от непразни множества,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. II, книга 3, 1986, 56-70.

[29] Сл. Щраков, *Екстремални подмножества и покрития на множествата от променливи за функциите,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. IV, книга 1, 1987, 48-55, ICDMA1.

[32] Сл. Щраков, *Неотделими множества и техни $s-$подмножества от променливи,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. V, книга 1, 1988, 25-49.

[33] Сл. Щраков, *Отделимост и доминируемост на множества от променливи за функциите,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. VII, книга 2, 1990, 63-72.

[34] Ал. Тодоров, Сл. Щраков, *Върху методите за провер ка на логически схеми,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. I, книга 1, 1984, 98-106.

[39] T. Bray, J. P. Paoh, C. M. Sperberg-McQueen, *Extensible Markup Language (XML) 1.0* , `http://www.w3.org/TR/1998/REC-xml-19980210/`, February 1998.

[40] A. Brüggemann-Klein, D. Wood, *Caterpillars: A context specification technique*, Markup Languages, 2(1):81-106, 2000.

[43] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millennium Edition, 2000

[46] K. Chimev, *Separable Sets of Arguments of Functions*, MTA SzTAKI Tanulmanyok, 180/1986, 173 pp.

[47] K. Chimev, *On Some Properties of Functions,* Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Szeged, 1981, 97-110.

[48] K. Chimev, *On separable sets of variables of functions,* Discrete Mathematics and Applications, ICDMA3, Research in Math. and Comp. Sci.,3,1993 (ed. K. Chimev and Sl.Shtrakov), Blagoevgrad, 42-46.

[50] K. Chimev, Sl. Shtrakov, *On the Maximal Separable Subsets of the Sets of Variables for the Functions,* Ann. of HPI, vol. 3, book 3, Blagoevgrad, 1986, pp. 30-42.

[51] K. Chimev, Sl. Shtrakov, *On the Dominant Sets of Variables for the Functions*, Tanulmanyok–MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, No. 182, (1986), pp. 37-42.

[52] K. Chimev, Sl. Shtrakov, I. Giudjenov, M. Aslanski, *Separable and Dominating Sets of Variables for the Functions,* (Invited paper), Mathematics and Education in Mathematics, Proc. of the 16th Spring Conference of the UBM, Sunny Beach, 1987, 61-71.

[53] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison, M. Tommasi,*Tree Automata, Techniques and Applications,* 1999,`http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata/`

[56] R. Davies, *Two Theorems on Essential Variables,* London Math. Soc., 41, 2, 1966, 331-335

[58] K. Denecke, D. Lau, R. Pöschel, D. Schweigert, *Hyperidentities, Hyperequational Classes and Clone Congruences,* General Algebra 7, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991, Verlag B.G. Teubner Stuttgart, pp.97-118

[59] K. Denecke, D. Lau, R. Pöschel, D. Schweigert, *Solidifyable Clones,* General Algebra 20, Heldermann Verlag , Berlin 1993, pp.41-69.

[60] K. Denecke, und J. Koppitz, *Essential variables in Hypersubstitutions*, Algebra Universalis 46(2001), 443-454.

[61] K. Denecke, J. Koppitz, and N. Pabhapote, *Essential variables in Weak Hypersubstitutions*, General Algebra and Applications, Proc. of 59-th Woprkshop on General Algebra, ed. K.Denecke and H.-J. Vogel, Potsdam, 2000, 41-60.

[64] K. Denecke, J. Koppitz, Sl. Shtrakov, *Multi-Hypersubstitutions and Coloured Solid Varieties*, J. Algebra and Computation, Volume 16, Number 4, August, 2006, pp.797-815.

[66] K. Denecke, Sl. Shtrakov, *Essential Variables and Separable Sets in Universal Algebra*, Taylor & Francis, Multiple-Valued Logic, An International Journal, vol. 8, No.2,2002, 165-182.

[69] K. Denecke, S. L. Wismath, *Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science*, Chapman and Hall/ CRC, 2002.

[71] K. Denecke, S. L. Wismath, *Complexity of terms, composition, and hypersubstitution,* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 15, 959-969.

[74] F. Gécseg, M. Steinby, *Tree Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1984

[76] E. Graczýnska, *On normal and regular identities and hyperidentities*, Universal and Applied Algebra, Turawa, Poland 3 - 7 May 1988, World Scientific (1989), 107 - 135.

[86] J. Koppitz, *M-solide Varietäten von Halbgruppen,* / Jörg Koppitz. - 2001. - 183 S. Potsdam, Univ., Habil-Schr., 2001

[88] J. Koppitz, Sl. Shtrakov, *On mappings of terms determined by hypersubstitutions*, Journal of Algebra and Discrete Mathematics, Number 3, July/September (2005), pp.18-29.

[90] R. McKenzie, G. Mc Nulty, W. Taylor, *Algebras, Lattices, Varieties,* Vol. I, Belmont, California 1987.

[91] I. Mirchev, *Strongly dominating sets in the theory of the separable sets of variables for functions*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA5, Research in Math. and Comp. Sci.,5,1995 (ed. Sl.Shtrakov and Iv.Mirchev), Blagoevgrad, 68-80.

[97] A. Salomaa, *On Essential Variables of Functions, Especially in the Algebra of Logic,* Annales Academia Scientiarum Fennicae, Ser. A, 333, 1963, 1-11.

[98] Sl. Shtrakov, *On Some Transformations in the k-Valued Logic*, Education in Mathematics, Proceedings of 14th Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematicians, Sunny Beach, 1985, pp.305-309

[105] Sl. Shtrakov, *Dominating and Annuling Sets for the Functions*, Blagoevgrad, SWU, 1987, p.179

[107] Sl. Shtrakov, *On the Mutually Dominating and Connected Sets of Variables*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA3, Research in Math. and Comp. Sci., v.3, 1993 (ed. K. Chimev and Sl. Shtrakov), 64-72.

[108] Sl. Shtrakov, *Separable sets of variables and $s-systems$*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA5, Research in Math. and Comp. Sci., v.5, 1993 (ed. Sl. Shtrakov and I. Mirchev), 61-67.

[112] Sl. Shtrakov, *Tree Automata and Essential Input Variables*, Contributions to General Algebra 13, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2001, pp.309-320.

[113] Sl. Shtrakov, *Term Compositions and Deductive Closures in Equational Theories*, J. Algebra Universalis, (to appear) 2007.

[114] Sl. Shtrakov, *Multi-Solid Varieties*, `http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0702454,` (submitted to JADM), 2007.

[119] W. Taylor, *Hyperidentities and Hypervarieties,* AEquationes Mathematicae, 23(1981), 30-49.

[120] J.W. Thatcher and J.B. Wright, *Generalized finite automata*, Notices Amer.Math.Soc. **12.** (1965), abstract No. 65T-649,820.

Публикации, приложени към дисертацията

[121] К. Чимев, Сл. Щраков, *Върху доминиращите множества и отделимите двойки от съществени променливи за функциите*, Годишник на висшите технически учебни заведения (Приложна математика), София, т. 21, книга 3, 1985, 145-151. [MR 88h:04003].

[122] Сл. Щраков, *Доминиращи множества от променливи за функциите и алгоритми за тяхното получаване*, Годишник на висшите технически учебни заведения (Приложна математика), София, т. 22, книга 1, 1986, 173-180.

[123] К. Чимев, Сл. Щраков, *Върху обобщените порядъци на променливите и $\varepsilon-$еквивалентности в някои алгебри от функции*, Годишник на висшите технически учебни заведения (Приложна математика), София, т.22, книга 1, 1986, 151-158.

[124] Сл. Щраков, *Върху c-отделимите и доминиращи множества от променливи за функциите*, Математика и математическо образование, Сборник от доклади на 15-та Пролетна конференция на СМБ, Слънчев бряг, 1986, 345-350 [Zbl. 604.94010]

[125] Сл. Щраков, *Неотделими множества и техни $s-$подмножества от променливи,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. V, книга 1, 1988, 25-49.

[126] Сл. Щраков, *Отделимост и доминируемост на множества от променливи за функциите,* Год. на ЮЗУ "Н.Рилски", Благоевград, т. VII, книга 2, 1990, 63-72.

[127] Sl. Shtrakov, *On the c-separable and dominant sets of variables for the functions*, Kozlemenyek – MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, No. 32, (1985), pp.155–161. [MR 87e:06032]

[128] Sl. Shtrakov, *On the Separable and Annulling Sets of Variables for the Functions*, Kozlemenyek– MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, 35(1986), pp.147-168,[Zbl. 611.04001]

[129] Sl. Shtrakov, *Mutually Dominating Sets of Variables for the Functions*, Tanulmanyok–MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, No. 182, (1986), pp. 51-76.

[130] Sl. Shtrakov, *On the anulator sets of variables for the functions*, Tanulmanyok–MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, No. 182, (1986), pp. 43-50. [MR 89c:26025]

[131] K. Chimev, Sl. Shtrakov, I. Giudjenov, M. Aslanski, *Separable and Dominating Sets of Variables for the Functions,* (Invited paper), Mathematics and Education in Mathematics, Proc. of the 16th Spring Conference of the UBM, Sunny Beach, 1987, 61-71. [MR 949 933] [Zbl 0641.94024]

[132] Sl. Shtrakov, *On the Dominating Sets of Variables for the Funktions*, Education in Mathematics, Proceedings of 14th Spring Conference of the UBM, Sunny Beach, 1987, pp.563-568.

[133] Sl. Shtrakov, *Dominating and Annuling Sets for the Functions*, Blagoevgrad, SWU, 1987, p.179

[134] Sl. Shtrakov, *Extremal Subsets and Coverings of the Sets of Variables for the Functions*, Kozlemenyek–MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, 38(1988), pp. 27-35 [Zbl. 0651.04002].

[135] Iv. Mirchev, Sl. Shtrakov, *Strongly dominating sets of variables*, Kozlemenyek–MTA SzTAKI (Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Science), Budapest, 39,(1988), pp. 121-129, [Zbl.0698.04004][MR 90a:26022].

[136] Sl. Shtrakov, *On the Mutually Dominating and Connected Sets of Variables*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA3, Research in Math. and Comp. Sci., v.3, 1993 (ed. K. Chimev and Sl. Shtrakov), 64-72.

[137] Sl. Shtrakov, *Separable sets of variables and $s-systems$*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA5, Research in Math. and Comp. Sci., v.5, 1993 (ed. Sl. Shtrakov and I. Mirchev), 61-67.

[138] Sl. Shtrakov, *On Some Transformation Groups in $k-$ Valued Logic*, General Algebra and Applications, v. 20, Heldermann Verlag Berlin, (ed. K. Denecke and H.-J. Vogel), 1993, pp.225-237 [Zbl. 0793.03023][MR1209902 (94b:03048)].

[139] Sl. Shtrakov, *Tree Automata and Essential Subtrees*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA6, Research in Math. and Comp. Sci., v.6, 2001 (ed. Sl. Shtrakov and K. Denecke)[MR 1 928 405], Blagoevgrad, 51-60 [Zbl 1021.68059][MR1928411 (2003i:68092)].

[140] K. Denecke, J. Koppitz, Sl. Shtrakov, *The Depth of a Hypersubstitution,* Journal of Automata, Languages and Combinatorics, vol.6, No.3, 2001, pp. 253-262 [MR 2003b:08001].

[141] I. Damyanov, Sl. Shtrakov, *Essential Inputs and Minimal Tree Automata*, Discrete Mathematics and Applications, ICDMA6, Research in Math. and Comp. Sci.,6,2001 (ed. Sl. Shtrakov and K. Denecke) , Blagoevgrad, 77-86 [MR1928414 (2003h:68089)] [Zbl 1024.68069].

[142] Sl. Shtrakov, Vl. Shtrakov, *Tree Automata and Separable Sets of Input Variables*, University of Nis, Yugoslavia, FILOMAT, vol.15, 2001, pp. 61-70.

[143] Sl. Shtrakov, *Tree Automata and Essential Input Variables*, Contributions to General Algebra 13, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2001, pp.309-320. [Zbl 0986.68071][MR 2002j:68058]

[144] Sl. Shtrakov, K. Denecke, *Essential Variables and Separable Sets in Universal Algebra*, Taylor & Francis, Multiple-Valued Logic, An International Journal, vol. 8, No.2,2002, 165-182. [Zbl 1022.08002][MR1957651 (2003k:08005)]

[145] J. Koppitz, Sl. Shtrakov, *On mappings of terms determined by hypersubstitutions*, Journal of Algebra and Discrete Mathematics, Number 3, July/September (2005), pp.18-29. [MR2237892]

[146] K. Denecke, J. Koppitz, Sl. Shtrakov, *Multi-Hypersubstitutions and Coloured Solid Varieties*, J. Algebra and Computation, Volume 16, Number 4, August, 2006, pp.797-815.[MR2258839]

[147] Sl. Shtrakov, *Term Compositions and Deductive Closures in Equational Theories*, J. Algebra Universalis, (to appear) 2007.

[148] Sl. Shtrakov, *Multi-Solid Varieties* , `http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0702454,` (submitted to JADM), 2007.

Сборници, приложени към дисертацията

[149] *7th International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 7),* (`http://www.icdma.swu.bg/icdma7/index.html`),*Proceedings of the 7th International Conference held in Bansko*, June 17– 20, 2004. Edited by Sl. Shtrakov and K. Denecke, Research in Mathematics and Computer Sciences, 7., South-West University, Blagoevgrad, 2005, ISBN: 954-680-363-4 [MR2181448], Abstracts (`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/caob-01`).

[150] *6th International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 6),* (`http://www.icdma.swu.bg/icdma6/index.html`),*Proceedings of*

the 6th International Conference held in Bansko, August 31–September 2, 2001. Edited by Sl. Shtrakov and K. Denecke, Research in Mathematics and Computer Sciences, 6, 2002. viii+218 pp. ISBN: 954-680-219-0 [MR 1928405], Abstracts (http://at.yorku.ca/c/a/h/n/01.htm).

Участие в научни конференции

1. Организатор на конференции и редактор на сборници от доклади и годишници

[151] *7th International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 7),* (http://www.icdma.swu.bg/icdma7/index.html),*Proceedings of the 7th International Conference held in Bansko*, June 17– 20, 2004. Edited by Sl. Shtrakov and K. Denecke, Research in Mathematics and Computer Sciences, 7., South-West University, Blagoevgrad, 2005. Abstracts (http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/caob-01).

[152] *Invited session "Universal Algebra, Tree Automata and XML-Data"* (http://www.iiis.org/sci2003/Invitedsession2003Acepted.htm) at the 7th World Multi Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI 2003) (http://www.iiisci.org/sci2003/) July 27 - 30, 2003, Orlando, Florida, USA Sheraton World

[153] *6th International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 6),* (http://www.icdma.swu.bg/icdma6/index.html),*Proceedings of the 6th International Conference held in Bansko*, August 31–September 2, 2001. Edited by Sl. Shtrakov and K. Denecke, Research in Mathematics and Computer Sciences, 6, 2002. viii+218 pp. ISBN: 954-680-219-0 MR 1928405, Abstracts (http://at.yorku.ca/c/a/h/n/01.htm).

[154] *5th International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 5),* (`http://www.icdma.swu.bg/icdma5/index.html`),*Proceedings of the 5th International Conference held in Blagoevgrad*, September 12–16, 1994. Edited by Sl. Shtrakov and Iv. Mirchev . Research in Mathematics, 5. 1995. 256 pp. ISBN: 954-680-001-5 `MR 95m:00019`.

[155] *3rd International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 3),* (`http://www.icdma.swu.bg/icdma3/index.html`),*Proceedings of the 3rd International Conference held in Blagoevgrad*, September 08–11, 1992 Edited by K. Chimev and Sl. Shtrakov . Research in Mathematics, 3.'Neofit Rilski" South-West University Publishing House, Blagoevgrad, 1993. 151 pp.

[156] *2nd International Conference on Discrete mathematics and applications (ICDMA 2),* (`http://www.icdma.swu.bg/icdma2/index.html`),*Proceedings of the 2nd International Conference held in Predela*, June 05–10, 1990. Edited by Sl. Shtrakov . Research in Mathematics 2. "Neofit Rilski" South-West University Publishing House, Blagoevgrad, 1990. 105 pp.

[157] *Годишник на ВПИ Благоевград, Математика, книга 1, том II, 1985, 1-296.*

[158] *Годишник на ВПИ Благоевград, Математика, книга 3, том II, 1986, 1-224.*

[159] *Годишник на ВПИ Благоевград, Математика, книга 1, том VI, 1989, 1-132.*

[160] *Годишник на ВПИ Благоевград, Математика, книга 1, том VII, 1990, 1-105.*

2. Участие с доклади или съобщения

[161] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA68)* (`http://www.math.tu-dresden.de/ aaa/aaa68.html`), University of Dresden, Germany, June, 10-13,2004, Paper's title:*Recursive Coloration of Trees* (Abstract)(`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/canq-16`) p. 46.

[162] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA67)* (`http://users.math.uni-potsdam.de/ denecke/Aaa67.htm`) Potsdam ,Germany, 26-28.03.2004 Paper's title:*On the Colouration of Terms* (Abstract) p. 71.

[163] *International Congress of Mathematical Society of South Eastern Europe (MASSEE'2003)* (`http://`) Borovets, Bulgaria, 15-21.09.2003 Paper's title:*Algorithms for Depth and Size of Hypersubstitutions* (Abstract)(`http:`) p. 166.

[164] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA65)* (`http://users.math.uni-potsdam.de/ denecke/Aaa65.htm`) Potsdam ,Germany, 20-23.03.2003 Paper's title:*All Input Variables Are Essential for Almost All Trees and Logical Tree Automata* (Abstract)(`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/cake-09`).

[165] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA63)* (`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/caht-19`) Kaiserslautern ,Germany, 22-24.02,2002, Paper's title:*Sequences of Hypersubstitutions and Coloring* (Abstract)(`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/caht-19`).

[166] *International Conference FILOMAT 2001 (FILOMAT2001)* (`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca-calendar/d/faby21`) Nis, Yugoslavia, 26.08-30.08.2001 Paper's title:*Tree Automata and Computational Complexity*

[167] *International Conference on Galois Connections (ICGC2001)* (`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca-calendar/d/fabs06`) Potsdam,

Germany, 15-18.03.2001 Paper's title:*Tree Automata and Essential Subtrees* (Abstract)(`http://at.yorku.ca/c/a/g/i/22.htm`).

[168] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA61)* (`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca-calendar/d/fabc33`) Darmstadt,Germany, 02-04.02.2001 Paper's title:*Algorithms for Depth and Size of Hypersubstitutions*

[169] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA60)* (`http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca-calendar/d/faas48`) Dresden,Germany, 22-25.06.2000 Paper's title:*Tree Automata and Essential Input Variables* (Abstract)(`http://at.yorku.ca/c/a/e/e/36.htm`).

[170] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (on occasion of the 70th birthday of H.-J.Hoehnke) (AAA52)* University of Potsdam, Campus Am Neuen Palais, Germany, 03-06.06.1996 Paper's title:*Dominating and Connected Sets of Variables*

[171] *Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA43)* University of Potsdam,Campus Golm,Germany, 31.01.1993-02.02.1993 Paper's title:*On Some Transformation Groups in k-Valued Logic.*

[172] *European Category Seminar (EECS)* Predela, 1986, Paper's title:*The Exponential and Power Transformations in k-Valued Logic*,vol.1, 1986, pp.41-42.