

1.4 Функции и изображения.Операции

Определение 1.4.1 Двучленната релация F между A и B се нарича **функция** на A в B , ако за всяко $x \in A$ съществува най-много едно $y \in B$ така, че $(x, y) \in F$.

От това определение следва, че F е функция точно тогава, когато от $(x, y_1) \in F$ и $(x, y_2) \in F$ следва, че $y_1 = y_2$.

Когато F е функция се използва означението $y = F(x)$ вместо $(x, y) \in F$. Също така това, че F е функция на A в B се отбелязва с $F : A \rightarrow B$, като евентуално се указва по какъв начин от x се получава y , за което $y = F(x)$.

Пример 1.4.1 Очевидно $F = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid y = 2x\}$ е релация в множеството на целите числа. Да допуснем, че $(x, y_1) \in F$ и $(x, y_2) \in F$. Следователно $y_1 = 2x$ и $y_2 = 2x$. От двете равенства следва, че $y_1 = y_2$, т.е. F е функция. Тази функция може да се запише и по един от следните начини:

- а) $y = 2x, x \in \mathbf{Z}$;
- б) $F : \begin{cases} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \\ x \rightarrow 2x; \end{cases}$
- в) $F(x) = 2x, x \in \mathbf{Z}$.

Определение 1.4.2 Функцията F на A в B се нарича **изображение** на A в B , ако за всяко $x \in A$ съществува точно едно $y \in B$ така, че $y = F(x)$.

Тъй като всяко цяло число n има точно едно удвоено $2n$ в \mathbf{Z} , следва че функцията от предишния пример е изображение на \mathbf{Z} в \mathbf{Z} .

Ако F е изображение на A в B и $(x, y) \in F$, то y се нарича *образ* на x при F , а x се нарича *праобраз* на y при F .

Едно изображение F на A в B се нарича *инективно* (*влагане, инекция*), ако всяко $y \in B$ има най-много един праобраз в A при F .

Лесно се съобразява, че F е влагане на A в B точно тогава, когато от $(x_1, y) \in F$ и $(x_2, y) \in F$ следва, че $x_1 = x_2$.

Едно изображение F на A в B се нарича *сюрективно* (*налагане, сюрекция*), ако всеки елемент на B има поне един праобраз, т.е. ако $R(F) = B$.

Изображението F , на A в B , когато е едновременно влагане и налагане се нарича *биективно* (*взаимно еднозначно, биекция*).

Без особени затруднения се вижда, че изображението на \mathbb{Z} в \mathbb{Z} , $F(x) = x + 1$ е биекция, докато изображението $F(x) = x^2$ е влагане, но не е налагане, тъй като всяко отрицателно число не е квадрат на никое цяло число.

Нека $F : A \rightarrow B$ и $G : B \rightarrow C$ са две изображения. Тогава изображението GF се нарича *композиция* (*произведение*) на F и G и се дефинира по следния начин:

$$GF : \begin{cases} A \rightarrow C \\ x \rightarrow G(F(x)). \end{cases}$$

Определение 1.4.3 Ако A е непразно множество, то всяка функция от A^2 към A се нарича **двучленна операция** в множеството A , а всяко изображение от A^2 към A се нарича **двучленна алгебрична (вътрешна) операция** в множеството A .

По аналогия с двучленните операции се дава определение на n -членни операции.

Когато една алгебрична операция е означена със знака "+", тя се нарича *адитивна* (*адитивно записана*), а когато е означена с някои от знаците ".", "*" – *мултипликативна* (*мултипликативно записана*). Елементът $a + b$ при адитивните операции се нарича *сума* на елементите a и b , а $a.b$ – *произведение* на a и b . Често за произведението $a.b$ се използва беззнаковото означение ab .

Определение 1.4.4 Едно множество A се нарича **полугрупа**, ако в него е въведена алгебрична операция, която е асоциативна, т.е. $(ab)c = a(bc)$ за всеки три елемента a, b и c на A .

Единица (*неутрален елемент*) на полугрупата A се нарича такъв елемент $e \in A$, за който

$$ea = ae = a$$

при всяко $a \in A$. Всяка полугрупа може да има най-много една единица, тъй като, ако \bar{e} е друга единица, то $e = e\bar{e} = \bar{e}$. Когато операцията е адитивна, неутралният елемент се нарича *нула* и се бележи с 0 и за всяко $a \in A$ е в сила $a + 0 = 0 + a = a$.

Ако B е подмножество на полугрупата A , такова че заедно с всеки два елемента съдържа и тяхното произведение (сума), то B се нарича *подполугрупа* на A и често това се бележи с $B \leq A$. Лесно се доказва, че сечението на произволен брой подполугрупи на A е подполугрупа на A .

Определение 1.4.5 *Полугрупа с единица се нарича **моноид**.*

Един елемент a на моноида A се нарича *обратим*, ако съществува елемент $a^{-1} \in A$ така, че

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e,$$

където e е единицата на A . Елементът a^{-1} , ако съществува е единствен, тъй като, ако \bar{a} е друг такъв елемент, то

$$\bar{a} = \bar{a}e = \bar{a}(aa^{-1}) = (\bar{a}a)a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}.$$

Често a^{-1} се нарича *обратен* елемент на a . Когато A е *адитивен моноид*, т.е. операцията му е адитивна, обратният елемент на a се нарича *противоположен* и се бележи с $-a$ и е в сила следното равенство

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Ако A е моноид, то всяка подполугрупа на A с единица се нарича *подмоноид* на A . Да отбележим, че единицата на даден подмоноид може да не съвпада с единицата на самия моноид. Сечението на произволен брой подмоноиди на даден моноид A , които имат една и съща единица е подмоноид на A .

Определение 1.4.6 *Моноид, на който всички елементи са обратими се нарича **група**.*

Едно подмножество на дадена група A се нарича неговa *подгрупа*, ако е група относно същата операция, спрямо която и A е група. Без сериозни затруднения се доказва, че сечението на произволен брой подгрупи на дадена група е нейна подгрупа.

В дадена група A произведението $a_1 a_2 \dots a_n$ се определя индуктивно, чрез равенството

$$a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{i=1}^n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n$$

и то е еднозначно определено, поради асоциативността на операцията в A . Аналогично, ако A е адитивна група имаме

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + a_2 + \dots a_{n-1}) + a_n.$$

От тези равенства при $a_i = a$ за $i = 1, 2, \dots, n$ получаваме a^n и na .

Една група A се нарича *комутативна*, ако $ab = ba$ за всеки два елемента a и b на A .

Определение 1.4.7 Нека A и B са две полугрупи (моноиди, групи) и $\psi : A \rightarrow B$ е изображение на A в B . Ще казваме, че ψ е **хомоморфизъм**, ако

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

за всеки два елемента a и b на A . Когато хомоморфизмът ψ е биективно изображение, той се нарича **изоморфизъм** между A и B .

З а д а ч и

1. Кой от следните функции са биекции?

а) $F(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

б) $F(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

$$\text{в) } F(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)}, x \in \mathbb{R}$$

2. Да се докаже, че обратната релация на една функция F е функция точно тогава, когато от $(x_1, y) \in F$ и $(x_2, y) \in F$ следва, че $x_1 = x_2$.

3. Да се докаже, че обратната релация на биективно изображение е биективно изображение.

4. Да се докаже, че ако F и G са биективни изображения между множества, то и тяхната композиция GF е биективно изображение, ако съществува.

5. Да се докаже, че ако F, G и H са биективни изображения между множества и $H(GF)$ съществува, то $H(GF) = (HG)F$.

6. Изображението $f : A \rightarrow B$ се нарича *епиморфизъм*, ако за всеки две изображения $g_i : B \rightarrow C, i = 1, 2$ от $g_1 f = g_2 f$ следва $g_1 = g_2$. Да се докаже, че f е епиморфизъм точно тогава, когато f е сюрективно.

7. Изображението $f : A \rightarrow B$ се нарича *мономорфизъм*, ако за всеки две изображения $h_i : D \rightarrow A, i = 1, 2$ от $f h_1 = f h_2$ следва $h_1 = h_2$. Да се докаже, че f е мономорфизъм точно тогава, когато f е инективно.

8. Да се провери кои от следните множества са групи:

а) множеството $\{-1, 0, 1\}$, относно събирането ;

б) множеството $P(A)$ от всички подмножества на непразното множество A , относно обединението;

в) множеството от всички вектори в равнината, относно събирането на вектори.

9. Да се провери дали следните изображения са хомоморфизми между групи, ако:

$$\text{а) } \psi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a \longrightarrow r^a; \end{cases}$$

$$\text{б) } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ b \longrightarrow \log_r b, \end{cases}$$

където \mathbb{R}^+ е групата (проверете!) на положителните реални числа, относно умножението, \mathbb{R} е групата на реалните числа, относно събирането и $r \in \mathbb{R}$ е число за което $r > 0$ и $r \neq 1$.