

4.6 Моноотоност на двоични функции. Затворен клас M

Нека $\alpha = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ и $\beta = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ са две n -орки.

Определение 4.6.1 Ще казваме, че α **предхожда** β (или че β **следва** α), ако са изпълнени неравенствата

$$a_1 \leq b_1, a_1 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n.$$

Горните неравенства се разбират като обикновени неравенства между числата 0 и 1.

Факта, че α предхожда β , ще означаваме с $\alpha \prec \beta$.

Пример 4.6.1 $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle \prec \langle 0, 0, 1, 0 \rangle \prec \langle 1, 0, 1, 0 \rangle \prec \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$.

Напълно е възможно за n -орките α и β да не е вярно нито $\alpha \prec \beta$ нито $\beta \prec \alpha$.

Пример 4.6.2 Не е вярно нито $\langle 1, 0, 0, 1 \rangle \prec \langle 1, 1, 0, 0 \rangle$, нито $\langle 1, 1, 0, 0 \rangle \prec \langle 1, 0, 0, 1 \rangle$.

Току що въведената релация \prec има следните свойства:

1. $\alpha \prec \alpha$.
2. От $\alpha \prec \beta$ и $\beta \prec \alpha$ следва $\alpha = \beta$.
3. От $\alpha \prec \beta$ и $\beta \prec \gamma$ следва $\alpha \prec \gamma$.

Следователно \prec е релация на частично подреждане в B^n .

Ако α и β се различават в една позиция, ще казваме, че α и β са *съседни*. Ако в редицата

$$\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_{i-1} \prec \alpha_i \prec \alpha_{i+1} \prec \dots \prec \alpha_s$$

всеки член е съседен с левия и с десния си съсед, ще казваме, че тази редица е *верига с дължина s* , която свързва α_1 с α_s . Почти очевидно е следното твърдение:

Теорема 4.6.1 Ако $\alpha \prec \beta$, може да се построи верига, която свързва α с β , имаща за дължина броя на несъпадащите позиции в α и β .

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че α и β се различават в първите си s позиции. Тъй като $\alpha \prec \beta$, то α в първите си s позиции има нули, а β – единици. В останалите позиции α и β съвпадат, т. е.

$$\alpha = \langle 0, 0, \dots, 0, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle, \quad \beta = \langle 1, 1, \dots, 1, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle.$$

Като изменяме последователно първата, втората, ..., s -тата позиция на α , ще получим веригата

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle 0, 0, \dots, 0, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle \prec \langle 1, 0, \dots, 0, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle \prec \\ &\prec \langle 1, 1, \dots, 0, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle \prec \dots \prec \langle 1, 1, \dots, 1, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle = \beta, \end{aligned}$$

която съединява α с β . \square

Определение 4.6.2 Ще казваме, че $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е **монотонна**, ако от $\alpha \prec \beta$ следва $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Пример 4.6.3 Лесно се установява с непосредствена проверка, че x_1x_2 и $x_1 \vee x_2$ са монотонни. Функциите $x_1 + x_2$ и \bar{x}_1 не са монотонни, защото $0 + 1 > 1 + 1$ и $\bar{0} > \bar{1}$.

Преброяването на монотонните функции на n променливи е твърде трудна задача, като относително точни оценки бяха получени едва в последно време. Ние ще докажем само една долна оценка на броя на монотонните функции на n променливи. Да означим с $\lfloor m \rfloor$ най-голямото цяло число, което не е по-голямо от m (някои автори използват за същите цели означението $[m]$).

Теорема 4.6.2 Броят на монотонните функции на n променливи е не по-малък от

$$2^{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Доказателство: Да разгледаме множеството от функции, които се определят по следния начин:

а) за n -орки с по-малко от $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ единични компоненти приемат стойност 0;

- б) за n -орки с повече от $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ единици приемат стойност 1.
 в) върху n -орки с $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ единици, приемат произволна стойност.

Веднага се вижда, че тези функции са монотонни, и тъй като се определят произволно върху $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -орки, броят им е $2^{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.
 \square

Да означим с M множеството от всички монотонни двоични функции.

Теорема 4.6.3 *Множеството M е затворен клас.*

Доказателство: Тъждествената функция x_i е монотонна. Нека f, g_1, g_2, \dots, g_n са монотонни и $\alpha \prec \beta$. Тогава

$$g_1(\alpha) \leq g_1(\beta), g_2(\alpha) \leq g_2(\beta), \dots, g_n(\alpha) \leq g_n(\beta)$$

и

$$f(g_1(\alpha), g_2(\alpha), \dots, g_n(\alpha)) \leq f(g_1(\beta), g_2(\beta), \dots, g_n(\beta)).$$

От последното неравенство следва, че сложна функция на монотонни функции е също монотонна. \square

Теорема 4.6.4 *Нека $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_s \notin S$ и $f_m \notin M$. Тогава функциите $0, 1, \bar{x}$ са суперпозиции над $\{f_0, f_1, f_s, f_m\}$, т. е. $\{0, 1, \bar{x}\} \subseteq [\{f_0, f_1, f_s, f_m\}]$.*

Доказателство: От теорема ?? следва, че

$$\{0, 1\} \subset [\{f_0, f_1, f_s\}] \subset [\{f_0, f_1, f_s, f_m\}].$$

Тъй като $f_m \notin M$, то съществуват две такива n -орки $\alpha \prec \beta$, че $f_m(\alpha) > f_m(\beta)$. Да свържем α и β с верига от съседни n -орки:

$$\alpha = \alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \dots \prec \alpha_s = \beta.$$

Тогава за поне едно i ще бъде изпълнено $f_m(\alpha_i) > f_m(\alpha_{i+1})$. В противен случай от $f_m(\alpha_i) \leq f_m(\alpha_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, s-1$, ще следва $f_m(\alpha) \leq f_m(\beta)$, което е невъзможно.

Нека

$$\alpha_i = \langle c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, 0, c_{j+1}, \dots, c_n \rangle,$$

$$\alpha_{j+1} = \langle c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, 1, c_{j+1}, \dots, c_n \rangle.$$

Да разгледаме

$$g(x_i) = f_m(c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, x_i, c_{j+1}, \dots, c_n).$$

Функцията g е получена от f_m чрез заместване на променливи с константи и чрез преименуване на променлива. Очевидно $g \in [\{f_0, f_1, f_s, f_m\}]$. Имаме

$$g(0) = f_m(c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, 0, c_{j+1}, \dots, c_n) = f_m(\alpha_i) > f_m(\alpha_{i+1}) =$$

$$= f_m(c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, 1, c_{j+1}, \dots, c_n) = g(1),$$

което показва, че $g(x_1)$ е отрицанието. \square

З а д а ч и

1. Покажете кои от следните функции: $x_1 \vee x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 | x_2, x_1 x_2 \dots x_n$, са монотонни и кои не са монотонни.
2. Намерете всички монотонни функции на две променливи.
3. Покажете, че единствените монотонни функции, които не запазват 1, са константите.
- 4*. Покажете, че броят на монотонните функции на n променливи не е по-голям от $n^{\binom{n}{2}}$.
- 5*. Покажете, че всяка монотонна функция е суперпозиция над $\{x_1 \vee x_2, x_1 x_2\}$.