

4.5 Двойственост. Самодвойствени функции. Затворен клас S

Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е произволна функция.

Определение 4.5.1 Функцията $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ще наричаме двойствена на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и ще я означаваме с $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Две формули също ще наричаме двойствени, ако реализират двойствени функции.

Пример 4.5.1

1. $(x)^* = \bar{\bar{x}} = x$.
2. $(\bar{x})^* = \bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$.
3. $(x_1 x_2)^* = \bar{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = x_1 \vee x_2$.
4. $(x_1 \vee x_2)^* = \bar{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = x_1 x_2$.
5. $(x_1 + x_2)^* = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + 1 = x_1 + x_2 + 1$.

Теорема 4.5.1 Двойствената функция $(f(g_1, g_2, \dots, g_n))^*$ на сложна функция е сложна функция от двойствените и компоненти, т.е.

$$(f(g_1, g_2, \dots, g_n))^* = f^*(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*).$$

Доказателство: От дефиницията за двойственост имаме:

$$\begin{aligned} f^*(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \bar{f}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n), \\ g_1^*(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}) &= \bar{g}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m_1}), \\ g_2^*(x_1, x_2, \dots, x_{m_2}) &= \bar{g}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m_2}), \\ &\dots\dots\dots \\ g_n^*(x_1, x_2, \dots, x_{m_n}) &= \bar{g}_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m_n}). \end{aligned}$$

След замяната на y_1, y_2, \dots, y_n с $g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*$ получаваме

$$\begin{aligned} f^*(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*) &= \bar{f}(\bar{g}_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_1}), \bar{g}_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_2}), \dots, \bar{g}_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_n})) = \\ &= \bar{f}(g_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_1}), g_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_2}), \dots, g_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_n})). \end{aligned}$$

□

Теорема 4.5.2 (Принцип на двойствеността). Нека F е множество от двоични функции:

$$F = \{f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), f_2(x_1, \dots, x_{n_2}), \dots\},$$

а G - множеството на двойствените функции на функциите в F :

$$G = \{(f_1^*(x_1, \dots, x_{n_1}), f_2^*(x_1, \dots, x_{n_2}), \dots\}.$$

Тогава, ако във формула ϕ над F заменим f_1, f_2, \dots с f_1^*, f_2^*, \dots ще получим формула Ψ над G , която реализира двойствената функция, спрямо функциите на F .

Доказателство: Да допуснем, че теоремата не е вярна. Тогава има формула F_1 , където замяната на f_1, f_2, \dots с f_1^*, f_2^*, \dots не води до искания резултат. Нека

$$F_1 = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n).$$

Да допуснем, че при замяната на f_1, f_2, \dots с f_1^*, f_2^*, \dots всички подформули на F_1 преминават в двойствени подформули. Да извършим тази замяна във F_1 . Получаваме

$$F_1^* = f_i^*(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*).$$

където е вярно едно от двете

а) φ_k е буква на променлива; тогава при смяната буквата остава непроменена, т.е. $\varphi_k = \varphi_k^*$; да забележим, че φ_k реализира тавтологична функция x_m , която съвпада със своята двойствена x_m^* ;

б) φ_k е формула, реализираща g_k ; съгласно нашето допускане, след смяната се получава формулата φ_k^* , която реализира двойствената функция g_k^* .

Сега нека F_1 реализира $f_i(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Тогава F_1^* ще реализира $f_i^*(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*) = (f_i(g_1, g_2, \dots, g_n))^*$, а това е невъзможно съгласно нашето допускане за F_1 . Следователно, съществува подформула φ_k на F_1 , която след замяната на f_1, f_2, \dots с f_1^*, f_2^*, \dots

не преминава във двойствена формула. Да положим $F_2 = \varphi_k$. Преходното разсъждение може да се повтори за F_2 и т.н. Както в предишния параграф получаваме една безкрайна редица от формули

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \dots,$$

и където всяка формула F_i е подформула на предишната F_{i-1} . Съществуването на такава редица не е възможно. \square

Ако имаме формула над $\{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$, реализираща $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то формула за $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над същото множество може да получим, като заменим конюнкциите с дизюнкции и дизюнкциите с конюнкции.

Пример 4.5.2 Двойствена функция на $x_1(x_2 \vee x_3)$ е $x_1 \vee x_2x_3$.

Определение 4.5.2 Ще казваме, че $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е **самодвойствена**, ако

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ще казваме, че n -орката $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ е *противоположна* на $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$.

От дефиницията на самодвойствена функция следва, че тя приема на противоположни n -торки противоположни стойности. Да означим с B_0^n всички n -торки, които започват с 0, а с B_1^n – които започват с 1. Лесно се вижда, че в B_0^n и B_1^n няма противоположни n -орки, а всяка n -торка от B_0^n е противоположна на n -торка от B_1^n . Следователно, ако определим една самодвойствена функция върху B_0^n , то тя се определя автоматично върху B_1^n . В B_0^n има 2^{n-1} n -торки. От тук броят на самодвойствените функции на n променливи е $2^{2^{n-1}}$.

Да означим с S множеството на всички самодвойствени функции.

Теорема 4.5.3 Множеството S е затворено.

Доказателство: Вече знаем, че тължествените функции са самодвойствени. Нека сега f, g_1, g_2, \dots, g_n са самодвойствени. Да

образуваме тяхната сложна функция $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Ще имаме

$$(f(g_1, g_2, \dots, g_n))^* = f^*(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*) = f(g_1, g_2, \dots, g_n),$$

което показва, че сложна функция от самодвойствени функции е отново самодвойствена. \square

Теорема 4.5.4 *Константите 1 и 0 са суперпозиции над множеството $\{f_0, f_1, f_s\}$, където $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$ и $f_s \notin S$, т. е. $\{0, 1\} \subset [\{f_0, f_1, f_s\}]$.*

Доказателство: В теорема ?? показахме, че с f_0 и f_1 можем да получим или константите или отрицанието. Ако сме получили константите, конструкцията е завършена. Да предположим, че от f_0 и f_1 имаме само отрицанието \bar{x} .

Тъй като $f_s \notin S$, то има такава n -торка $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, че на нея и на противоположната n -торка $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$ функцията f_s приема една и съща стойност:

$$f_s(a_1, a_2, \dots, a_n) = f_s(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n).$$

Да положим $g(x) = f_s(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n})$. Функцията $g(x)$ е суперпозиция над f_0, f_1, f_s , защото x^{a_k} се получава с преименоване на променлива (ако a_k е 1) или с преименуване и отрицание (ако a_k е 0). Имаме

$$\begin{aligned} g(0) &= f_s(0^{a_1}, 0^{a_2}, \dots, 0^{a_n}) = f_s(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = \\ &= f_s(a_1, a_2, \dots, a_n) = f_s(1^{a_1}, 1^{a_2}, \dots, 1^{a_n}) = g(1). \end{aligned}$$

Следователно, $g(x)$ е константа. С отрицанието може да получим и другата константа. \square