

1.2 Наредени двойки. Декартово произведение

Определение 1.2.1 *Казваме, че елементите x и y образуват **наредена двойка**, ако единият от тях е приет за първи, а другият за втори.*

Наредената двойка с първи елемент x и втори y ще означаваме с $\langle x, y \rangle$ или (x, y) .

Аналогично *наредена n -орка* ще наричаме всяко множество от n елемента, в което е указано кой е първи, кой е втори и т.н. кой е последен. Наредените n -орки ще означаваме по следния начин: $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ или (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Ще казваме, че наредените n -орки $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ и $\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ са *равни*, ако $x_i = y_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 1.2.2 *Нека A и B са две множества. Под **декартово произведение** на A и B ще разбираме множеството*

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ и } b \in B \}.$$

От определението следва непосредствено, че декартовото произведение не притежава свойствата комутативност и асоциативност.

По аналогия на случая с две множества, се въвежда декартово произведение на n множества A_1, A_2, \dots, A_n , като:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Множеството $A^n = A \times A \times \dots \times A$ се нарича *n -та декартова степен* на множеството A .

Ако A, B и C са произволни множества, то в сила са следните равенства:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B);$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

$$C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B);$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

З а д а ч и

1. Да се докаже, че ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \times C \subseteq B \times D$ и обратно.
2. Да се докаже, че $A \times B = C \times D$ точно тогава, когато $A = C$ и $B = D$.
3. Да се докаже верността на равенствата:
 - а) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
 - б) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$;
 - в) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
 - г) $(A \setminus B) \times C \subset (A \times C) \setminus (B \times C)$.