

2.10 Автомат на Мили и автомат на Мур

Досега разгледаните автомати решаваха главно задачата за разпознаване на думите от даден език. Често такива автомати се наричат *разпознаватели на езици*. Не по-малко важна е и задачата за преобразуването на думите от даден език L_1 в думи от друг (не обезателно различен от L_1) език L_2 . Автомати, с които се решава тази задача се наричат *преобразуватели на езици*. Такъв автомат използва две азбуки входна и изходна и на всяка дума над входната азбука (или от определен език над нея) съпоставя по една дума над изходната азбука. Тези автомати работят последователно, на отделни тактове. На всеки такт се прочита по една буква от входната дума и в зависимост от нея и предишното състояние автоматът преминава в ново състояние и извежда една буква от изходната азбука. Работата си всеки преобразовател започва от едно фиксирано състояние, което е негово начално състояние. Работата на такъв автомат върху дадена входна дума се счита за завършена, ако е достигнал до състояние q и входната буква a , за които не е дефиниран или, ако са изчерпани всички букви на входната дума. Резултатът от работата на автомата е получената изходната дума. Ще разгледаме два вида преобразователи и ще покажем, че в известен символ те са "еквивалентни" на крайните автомати.

Определение 2.10.1 *Под автомат на Мили ще разбираме наредена шесторка*

$$M = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle,$$

където

- K е крайно непразно множество, наречено азбука от състояния на автомата;
- V е крайна входна азбука;
- W е крайна изходна азбука;
- $\delta : K \times V \rightarrow K$ е функция на преходите;
- $\lambda : K \times V \rightarrow W$ е изходна функция;
- $q_0 \in K$ е начално състояние.

Работата на автомата на Мили M върху входната дума $\omega = a_1 a_2 \dots a_s$ се състои в следното:

По началното състояние q_0 и първата буква a_1 се определят новото състояние $p_1 = \delta(q_0, a_1)$ и изходната буква $b_1 = \lambda(q_0, a_1)$.

По състоянието p_{i-1} и i -та буква на входната дума, на i -ия такт се определя новото състояние $p_i = \delta(p_{i-1}, a_i)$ и i -та буква на изходната дума $b_i = \lambda(p_{i-1}, a_i)$, за $i = 2, 3, \dots, s$.

Тъй като входната дума ω има краен брой букви, то и автоматът M ще свърши своята работа след краен брой тактове. В резултат от работа на автомата, думата $\omega \in V^*$ се преобразува в думата $\omega' = b_1 b_2 \dots b_s \in W^*$, което ще записваме с $\omega' = M(\omega)$. Очевидно, ако $\omega = \varepsilon$, то $\omega' = \varepsilon$, т.е. $\varepsilon = M(\varepsilon)$.

Нека $L_1 \subset V^*$ е формален език, а езикът L_2 се определя с равенството

$$L_2 = \{\omega \in W^* \mid \omega = M(\alpha), \alpha \in L_1\}.$$

Ще казваме, че автоматът M *преобразува* езика L_1 в езика L_2 , или че L_2 е образ на L_1 при работа на автомата A върху езика L_1 . Това ще записваме с равенството $L_2 = M(L_1)$.

Както при крайните автомати, функциите δ и λ могат да се задават таблично, тъй като дефиниционите им области и областите им от стойности са крайни. По тези таблици може да се построи графът на съответния автомат.

Пример 2.10.1 Да разгледаме автоматът на Мили

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{a, b\}, \delta, \lambda, q_0 \rangle,$$

в който функциите δ и λ са дадени, чрез равенствата

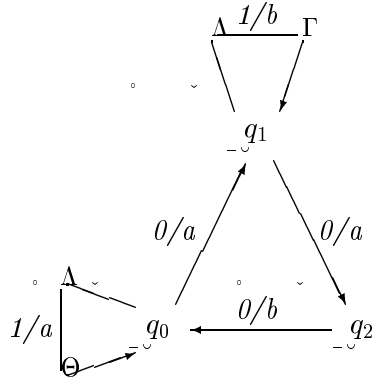
$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= q_1, \delta(q_0, 1) = q_0, \delta(q_1, 0) = q_2, \delta(q_1, 1) = q_1, \delta(q_2, 0) = q_0, \\ \lambda(q_0, 0) &= a, \lambda(q_0, 1) = a, \lambda(q_1, 0) = a, \lambda(q_1, 1) = b, \lambda(q_2, 0) = b. \end{aligned}$$

Тези функции са представени на следната таблица.

δ/λ	0	1
q_0	q_1/a	q_0/a
q_1	q_2/a	q_1/b
q_2	q_0/b	$-/-$

Работата на този автомат върху входната дума 11010 се проследява върху неговия граф и като резултат се получава думата $aaba$, а автоматът се довежда в състоянието q_2 .

Графът (диаграмата) на този автомат е представена на Фиг. 2.10.1.



Фиг. 2.10.1

Определение 2.10.2 *Под автомат на Мур ще разбираме наредена шесторка $N = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$, за която K, V, W, δ и q_0 са определени, както за автомат на Мили, а $\lambda : K \rightarrow W$ е изходна функция на N .*

Работата на автомата над думата $\omega = a_1 a_2 \dots a_s \in V^*$, се състои в следното:

От началното състояние q_0 се получава първата буква $b_1 = \lambda(q_0)$ на изходната дума, а от q_0 и първата буква a_1 на ω се получава новото състояние $p_1 = \delta(q_0, a_1)$.

На i -ия такт, по състоянието p_{i-1} се получава i -та буква на изходната дума $b_i = \lambda(p_{i-1})$ и новото състояние $p_i = \delta(p_{i-1}, a_i)$, за $i = 2, 3, \dots, s$.

Както и при автомата на Мили, автоматът N завършва работата си в краен брой тактове, т.е. достига в състояние, в което не е дефиниран или буквите на ω са изчерпани.

Резултатът от работата на автомата N е изходната дума $\omega' = b_1 b_2 \dots b_{s+1} \in W^*$. Очевидно, ако $\omega = \varepsilon$, то $\omega' = \lambda(q_0) = b_1$.

Както при автомата на Мили, ако резултатът от работата на N върху думата $\omega \in V^*$ е $\omega' \in W^*$, ще казваме, че N *преобразува* ω в ω' и ще пишем $\omega' = N(\omega)$.

За автомата на Мур, функциите δ и λ също могат да се зададат таблично и да се построи неговия граф (диаграма).

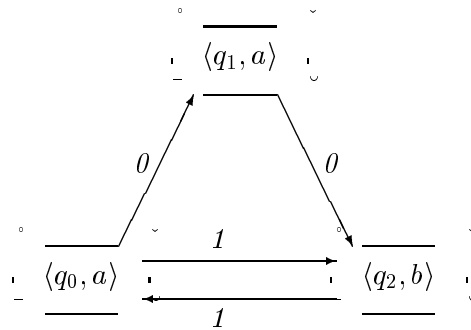
Пример 2.10.2 Нека $N = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{a, b\}, \delta, \lambda, q_0 \rangle$, като $\delta(q_0, 0) = q_1$, $\delta(q_0, 1) = q_2$, $\delta(q_1, 0) = q_2$, $\delta(q_2, 1) = q_0$, $\lambda(q_0) = a$, $\lambda(q_1) = a$, $\lambda(q_2) = b$.

Тези функции могат да се зададат, чрез следните таблици:

δ	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_2	—
q_2	—	q_0

λ	a	a	b
	q_0	q_1	q_2

Тогава диаграмата на автомата N , може да се представи с графа на Фиг. 2.10.2.



Фиг. 2.10.2

Определение 2.10.3 Нека $M = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$, е автомат на Мили, $N = \langle K', V, W, \delta', \lambda', q'_0 \rangle$ е автомат на Мур и $\lambda'(q'_0) = b \in W$. Ще казваме, че автоматите M и N са **еквивалентни**, ако за всяко $\omega \in V^*$ е в сила $bM(\omega) = N(\omega)$.

Теорема 2.10.1 *Нека $M = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$ е автомат на Мили. Съществува автомат на Мур N , който е еквивалентен на M .*

Доказателство: Да положим $N = \langle K', V, W, \delta', \lambda', q'_0 \rangle$ и да определим компонентите на този автомат на Мур по следния начин: $K' = K \times W$; $\delta'(\langle q, b \rangle, a) = \langle \delta(q, a), \lambda(q, a) \rangle$ за всеки $q \in K$, $a \in V$ и $b \in W$; $\lambda'(\langle q, b \rangle) = b$ за всеки $q \in K$ и $b \in W$; и $q'_0 = \langle q_0, b_0 \rangle$, където b_0 е произволно избрана и фиксирана буква в W .

Доказателството, че M и N са еквивалентни предоставяме за самостоятелно упражнение. \square

На автомата на Мили от Пример 2.10.1 е еквивалентен следният автомат на Мур $N = \langle \{ \langle q_0, a \rangle, \langle q_0, b \rangle, \langle q_1, a \rangle, \langle q_1, b \rangle, \langle q_2, a \rangle, \langle q_2, b \rangle \}, \{0, 1\}, \{a, b\}, \delta', \lambda', \langle q_0, a \rangle \rangle$, където δ' и λ' са определени с равенствата

$$\delta'(\langle q_0, a \rangle, 0) = \delta'(\langle q_0, b \rangle, 0) = \langle q_1, a \rangle;$$

$$\delta'(\langle q_0, a \rangle, 1) = \delta'(\langle q_0, b \rangle, 1) = \langle q_0, a \rangle;$$

$$\delta'(\langle q_1, a \rangle, 0) = \delta'(\langle q_1, b \rangle, 0) = \langle q_2, a \rangle;$$

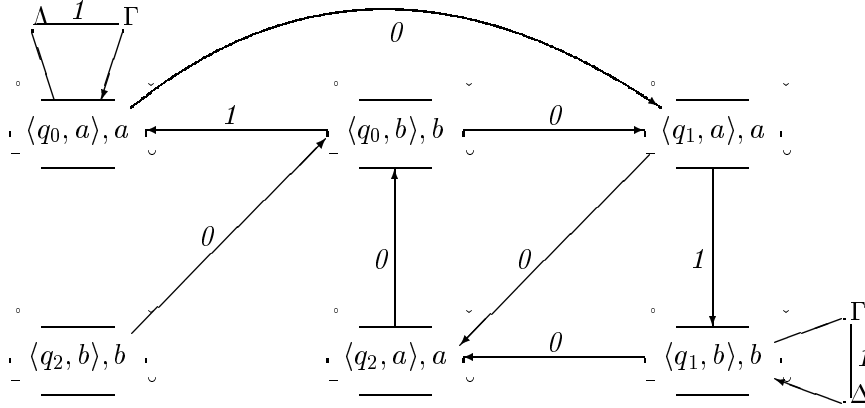
$$\delta'(\langle q_1, a \rangle, 1) = \delta'(\langle q_1, b \rangle, 1) = \langle q_1, b \rangle;$$

$$\delta'(\langle q_2, a \rangle, 0) = \delta'(\langle q_2, b \rangle, 0) = \langle q_0, b \rangle;$$

$$\lambda'(\langle q_0, a \rangle) = \lambda'(\langle q_1, a \rangle) = \lambda'(\langle q_2, a \rangle) = a;$$

$$\lambda'(\langle q_0, b \rangle) = \lambda'(\langle q_1, b \rangle) = \lambda'(\langle q_2, b \rangle) = b.$$

Графът на този автомат е показан на Фиг. 2.10.3.



Фиг. 2.10.3

Теорема 2.10.2 Нека $N = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$ е автомат на Мур. Съществува еквивалентен на N автомат на Мили.

Доказателство: Нека $M = \langle K, V, W, \delta, \lambda', q_0 \rangle$ е автомат на Мили, за който $\lambda'(q, a) = \lambda(\delta(q, a))$, за всеки $q \in K$ и $a \in V$.

Без особени затруднения се доказва, че $\omega' = N(\omega)$ точно тогава, когато $\omega' = bM(\omega)$, където $b = \lambda(q_0)$. \square

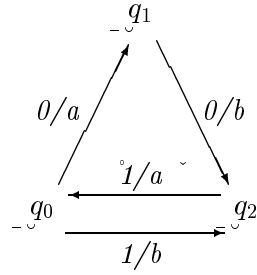
На автомата от Пример 2.10.2 е еквивалентен следният автомат на Мили.

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{a, b\}, \delta, \lambda', q_0 \rangle,$$

където

$$\lambda'(q_0, 0) = a, \quad \lambda'(q_0, 1) = b, \quad \lambda'(q_1, 0) = b, \quad \lambda'(q_2, 1) = a.$$

Графът на този автомат е представен на Фиг. 2.10.4.



Фиг. 2.10.4

Теорема 2.10.3 Нека L е автоматен език, а M автомат на Мили. Тогава $M(L)$ също е автоматен.

Доказателство: Нека $M = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$ и нека $A = \langle Q, V, \nu, s_0, F \rangle$ е краен детерминиран автомат, който разпознава езикът L , т.е. $L = L(A)$. Построяваме автомата

$$B = \langle Q \times K, W, \mu, \langle s_0, q_0 \rangle, F \times K \rangle,$$

където $\mu(\langle s, q \rangle, b) = \langle s', q' \rangle$, ако съществува a , $a \in V$, така че $\delta(q, a) = q'$, $\lambda(q, a) = b$ и $\nu(s, a) = s'$.

Да докажем, че автоматът B разпознава езика $M(L)$.

Нека $\omega = b_1 b_2 \dots b_m \in M(L)$. Следователно съществува дума $\omega' = a_1 a_2 \dots a_m \in L$ така, че $\omega = M(\omega')$. Това означава, че съществуват редици от състояния (не обезателно различни)

$$q_0, q_1, \dots, q_m \text{ и } s_0, s_1, \dots, s_m, \quad s_m \in F$$

на автоматите M и A така, че

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a_1) &= q_1; & \lambda(q_0, a_1) &= b_1; & \nu(s_0, a_1) &= s_1; \\ \delta(q_1, a_2) &= q_2; & \lambda(q_1, a_2) &= b_2; & \nu(s_1, a_2) &= s_2; \\ &\dots & &\dots & &\dots \\ \delta(q_{m-1}, a_m) &= q_m; & \lambda(q_{m-1}, a_m) &= b_m; & \nu(s_{m-1}, a_m) &= s_m. \end{aligned}$$

Тогава

$$\mu(\langle s_0, q_0 \rangle, b_1) = \langle s_1, q_1 \rangle;$$

$$\mu(\langle s_1, q_1 \rangle, b_2) = \langle s_2, q_2 \rangle;$$

. . .

$$\mu(\langle s_{m-1}, q_{m-1} \rangle, b_m) = \langle s_m, q_m \rangle \in F \times K.$$

Следователно $\omega \in L(B)$. □

З а д а ч и

1. Да се докаже, че ако на входа на един автомат на Мили се подава постоянно един и същи символ от входната азбука, то изходната дума w , получена при работата на автомата е периодична т.е. има вида

$$w = \alpha\alpha \dots \alpha,$$

където $\alpha \in W^*$, $|\alpha| \leq |K|$.

2*. Нека $V = \{a, b\}$ и $W = \{0, 1\}$, а $f : V^* \rightarrow W$ е функция, за която:

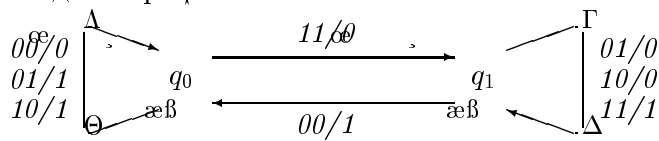
$$\text{а) } f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{ако в } \alpha \text{ има еднакъв брой} \\ & \text{а-та и b-та} \\ 0 & \text{в противния случай;} \end{cases}$$

$$\text{б) } f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{ако } \alpha = \gamma ab^{m^2}, \gamma \in V^*, n\text{-естествено} \\ 0 & \text{в противния случай.} \end{cases}$$

Да се докаже, че не съществува автомат на Мили M , за който $M(a_1 a_2 \dots a_s) = f_1 f_2 \dots f_s$, където $f_i = f(a_1 a_2 \dots a_i)$, $a_i \in V$, $i \leq s$.

3. Да се построи автомат на Мили, който по зададена дума $w = a_{2s} a_{2s-1} \dots a_1$ над азбуката $\{0, 1\}$ извежда сумата на двоичните числа $a = a_1 a_3 \dots a_{2s-1}$ и $b = a_2 a_4 \dots a_{2s}$.

У п ъ т в а н е: Докажете, че търсеният автомат може да се зададе със следния граф



4*. Да се докаже, че не съществува автомат на Мили, който да умножава произволни двоични числа.

Упътване: Допуснете, че такъв автомат съществува и ако броят на състоянията му е n , то при пресмятането на произведението $\underbrace{10\dots 0}_{n+1} \cdot \underbrace{10\dots 0}_{n+1}$ покажете, че той не би могъл да определи най-старшата цифра на това произведение, тъй като на $2n+3$ -ия такт, той ще се намира в състояние, в което вече е бил и при това, със същите входни букви, а до този такт е извеждал само 0.

5. Да се построи автомат на Мили, който на всяко положително двоично число x с дължина n , съпоставя двоичното число $2^n - x$.

Отг.

