

4.3 Пълни множества от двоични функции

Теорема 4.3.1 (теорема на Бул) *Множеството от двоични функции $\{\bar{x}_1, x_1 \vee x_2, x_1 x_2\}$ е пълно.*

Доказателство: Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Тогава очевидно $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \bar{x}_1$.

Нека сега $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е произволна двоична функция, различна от нулата. Да означим

$$x^a = \begin{cases} \bar{x}, & a = 0 \\ x, & a = 1. \end{cases}$$

Не е трудно да се види, че $x^a = 1$ тогава и само тогава, когато $x = a$. Оттук $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = 1$ тогава и само тогава, когато $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$. Следователно

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

където дизюнкция се взема по всички n -орки $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, за които $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

Наистина, ако $f(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1$, то в дясната страна на равенството ще има член на дизюнкцията от вида $b_1^{b_1} b_2^{b_2} \dots b_n^{b_n} = 1$, откъдето получаваме, че самата дизюнкция ще е равна на 1. Ако $f(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$, във всички членове на дизюнкцията ще има поне един множител, чиято стойност няма да съвпадне със степента си, а оттам всички членове, а следователно и самата дизюнкция ще са равни на 0. \square

Теорема 4.3.2 *Нека*

$$F = \{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}), f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}), \dots\}$$

е пълно множество функции. Тогава необходимото и достатъчно условие множеството от функции

$$G = \{g_1(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), g_2(x_1, x_2, \dots, x_{m_2}), \dots\}$$

да е пълно е всички функции $f_1, f_2, \dots, f_l, \dots$ от F да са суперпозиции над G .

Доказателство: Необходимостта е очевидна. Ако G е пълно, всички функции от P_2 , включително f_1, f_2, \dots , са суперпозиции над G .

Достатъчността се вижда също така лесно. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots$ са формули над G , които реализират $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$. Да изберем произволна двоична функция $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и да я реализираме с формула ϕ над F . В ϕ да заменим f_1, f_2, \dots с $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Лесно се вижда, че ще получим формула над G , която реализира $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. \square

От теореми 4.3.1 и 4.3.2 следва пълнотата на редицата множества от функции:

1. Множеството $\{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ е пълно, защото $x_1 x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$.
2. Множеството $\{x_1 x_2, \bar{x}_1\}$ е пълно, защото $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$.
3. Множеството $\{x_1 | x_2\}$ е пълно, защото $x_1 | x_1 = \bar{x}_1$, а $(x_1 | x_1) | (x_2 | x_2) = x_1 \vee x_2$.
4. Множеството $\{x_1 \downarrow x_2\}$ е пълно, защото $x_1 \downarrow x_1 = \bar{x}_1$, а $(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) = x_1 x_2$.
5. Множеството $\{x_1 x_2, x_1 + x_2, 1\}$ е пълно, защото $\bar{x}_1 = x_1 + 1$.

В т.3 и 4 са показани пълни множества, които се състоят от една функция. Ако f е такава функция, че $\{f\}$ е пълно множество, то f се нарича *шеферова функция*.

Да разгледаме по-внимателно пълното множество $\{x_1 x_2, x_1 + x_2, 1\}$. Не е трудно да се види, че всяка формула над $\{x_1 x_2, x_1 + x_2, 1\}$ може да бъде преобразувана до вида

$$M_1 + M_2 + \dots + M_s,$$

където M_i е едночлен от вида $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}$ или е константа. Едно такова преобразуване се извършва, чрез разкриване на скобите във формулата.

Използвайки равенството $x_k x_k = x_k$, всеки едночлен $M_i = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_t}$ можем да сведем до едночлен M_i , който е произведение на различни променливи. Чрез свойството $M'_i + M'_i = 0$

изразът $M'_1 + M'_2 + \dots + M'_t$ може да бъде сведен до сума на различни едночлени, а във всеки едночлен променливите са различни.

Определение 4.3.1 Израз от вида $E_1 + E_2 + \dots + E_s$, в който едночлените E_1, E_2, \dots, E_s са различни, като всеки съдържа различни променливи или са константа, се нарича **полином на Жегалкин**.

От казаното по-горе следва, че всяка двоична функция се реализира с полином на Жегалкин.

Да преброим полиномите на Жегалкин, в които участват променливите x_1, x_2, \dots, x_n . Броят на едночлените с j различни променливи е $C_j^n = \binom{n}{j}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Следователно броят на всички различни едночлени, които можем да образуваме с променливите x_1, x_2, \dots, x_n , е

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n.$$

Всяко подмножество на множеството на всички едночлени задава еднозначно сума от различни едночлени. Тъй като подмножествата са 2^{2^n} , получихме, че броят на полиномите е равен на броя на функциите на n променливи. Оттук следва известната теорема на Жегалкин:

Теорема 4.3.3 Всяка двоична функция се реализира с точно един полином на Жегалкин.

З а д а ч и

1. Постройте формула над $\{x_1 \vee x_2, x_1 x_2, \bar{x}\}$, която да реализира функцията, зададена в таблицата 4.6.

Таблица 4.6

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2. Реализирайте функцията от таблица 4.6 с полином на Жегалкин.
3. Покажете, че множеството $\{x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2, 0, 1\}$ е пълно.
4. Покажете, че $\{x_1x_2, x_1 \vee x_2\}$ не е пълно.