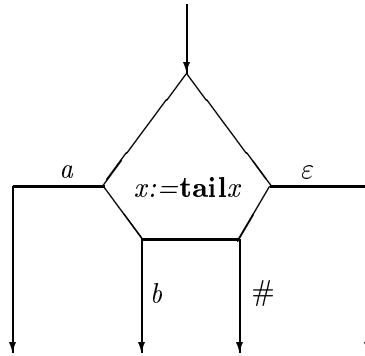


3.6 Машина на Пост и машина на Тюринг

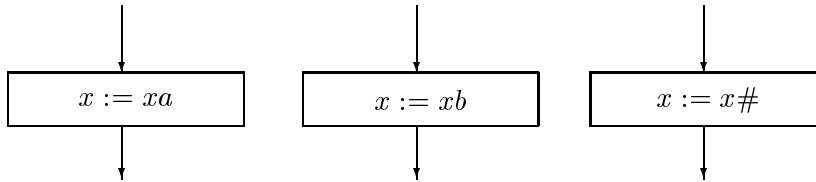
Ще разгледаме още два типа машини, които са еквивалентни на крайни машини с два стека.

Определение 3.6.1 *Под машина на Пост над азбуката $V = \{a, b\}$ ще разбираме блок-схема с една променлива x , която може да приема за стойности всяка дума над азбуката $\{a, b, \#\}$ (символът $\#$ е специален и често служи за индикация на края или началото на дадена дума) със следните оператори:*

1. Оператори за начало **start**, и край **reject** и **admit**.
2. Оператор за анализ, означен накратко чрез



3. Оператори за присвояване



При операторите за анализ се взема **first** x и в зависимост от стойността ѝ се избира по кое от дадените четири разклонения ще продължи работата си машината, а стойността на x се заменя с **tail** x .

Определение 3.6.2 Ще казваме, че дадена дума w се **разпознава** от машината на Пост M , ако тя завършва работата си върху w , чрез оператора **admit**, в противен случай думата w се **отхвърля** от машината M .

Да забележим, че операторите за присвояване в машините на Пост осъществяват конкатенация на думи с букви, като буквите се добавят в края на думата, за разлика от същите оператори при стековете.

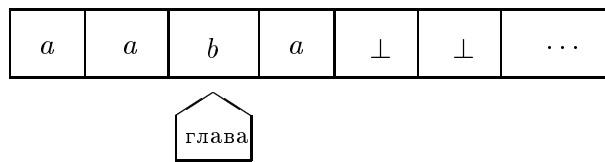
На Фиг.3.6.1 е зададена машината на Пост M_5 , която разпознава всички думи от езика $L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$ и отхвърля думите, които не са в L .

Съществуват различни (но еквивалентни) дефиниции на машината на Тюринг.

Определение 3.6.3 *Ще смятаме, че всяка машина на Тюринг над азбуката $V = \{a, b\}$ се състои от три основни компонента:*

(i) *лента*, която е разделена на клетки и е безкрайна надясно. Във всяка клетка, може да се запише само един символ. Символите, които могат да се записват в клетките на лентата са буквите от азбуката $V = \{a, b\}$ и от една помощна азбука W , както и един специален символ " \perp " за празна клетка (Фиг.3.6.2)

(ii) *четящо-записващо устройство (глава)*. Главата във всеки момент чете (или записва) само един символ и може да се придвижва с една клетка наляво или надясно (Фиг.3.6.2)



Фиг. 3.6.2

(iii) *програма*, която е ориентиран граф, чийто върхове ще наричаме *състояния*. Едно от състоянията е избрано за начално и е означено със **start**. Част от състоянията са означени с **end** и се считат за заключителни. Всяко ребро (стрелка) на програмата има вида

$$_i \xrightarrow{(\alpha, \beta, \gamma)} _j$$

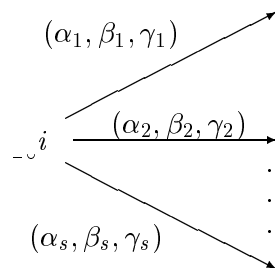
където $\alpha, \beta \in V \cup W \cup \{\perp\}$ и $\gamma \in \{L, R\}$. Това означение трябва да се разбира по следния начин: ако по време на работата на машината се стигне до състояние i , а главата е позиционирана върху клетка от лентата със съдържание α , то се преминава в състояние j , като в клетката α се заменя с β , след което главата се премества наляво с една клетка, ако $\gamma = L$ или надясно, ако $\gamma = R$.

Машината на Тюринг се нарича *детерминирана*, ако всички ребра, които изхождат от произволно състояние i са с различни стойности на α . В противния случай машината на Тюринг се нарича *недетерминирана*.

Работата на машината на Тюринг M върху думата ω започва след като ω се разполага най-вляво върху лентата, а останалите клетки са празни т.е. условно тяхното съдържание е символът \perp . Главата се позиционира върху най-лявата клетка на лентата.

Работата на машината се осъществява, като се следват "инструкциите" в програмата започвайки от състоянието **start**.

Определение 3.6.4 Когато машината спре работата си в заключително състояние, казваме че думата ω **се разпознава** от машината M . Думата ω **се отхвърля** в два случая: (i) когато главата се намира върху най-лявата клетка на лентата и по програмата следва да се придвижи наляво и (ii) когато се стигне до състояние от вида



а главата е позиционирана върху клетка, чието съдържание не е измежду символите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Всяко преминаване от едно в друго (не обезателно различно) състояние се нарича *такт на машината*.

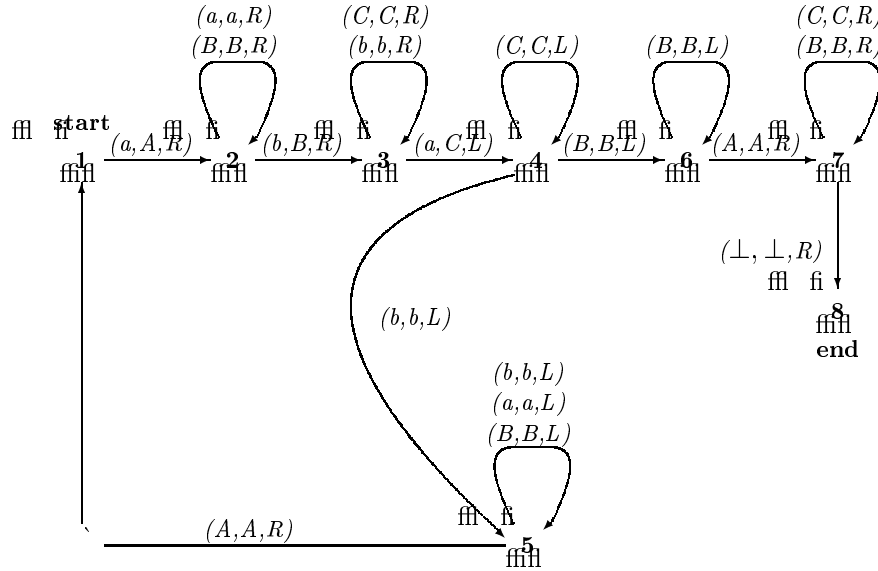
Може да се случи при работата си върху дадена входна дума ω , една машина на Тюринг да влезе във цикъл, т.е. машината не завършва работата си в заключително състояние на

програмата, а и не отхвърля думата ω . В този случай казваме че машината на Тюринг *зацикля*, работейки върху думата ω .

Следователно, ако M е машина на Тюринг, то всички думи над V се разбиват на три класа:

admit (M) = $\{\omega \mid \omega \text{ се разпознава от } M\}$,
reject (M) = $\{\omega \mid \omega \text{ се отхвърля от } M\}$
и **loop** (M) = $\{\omega \mid M \text{ зацикля работейки върху } \omega\}$,
като **admit** (M) \cup **reject** (M) \cup **loop** (M) = V^* .

Пример 3.6.1 Машината на Тюринг M_6 , която разпознава езика $L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$ има за програма ориентирания граф на Фиг.3.6.3



Фиг. 3.6.3

Машина на Тюринг, разпознаваща езика $\{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$.

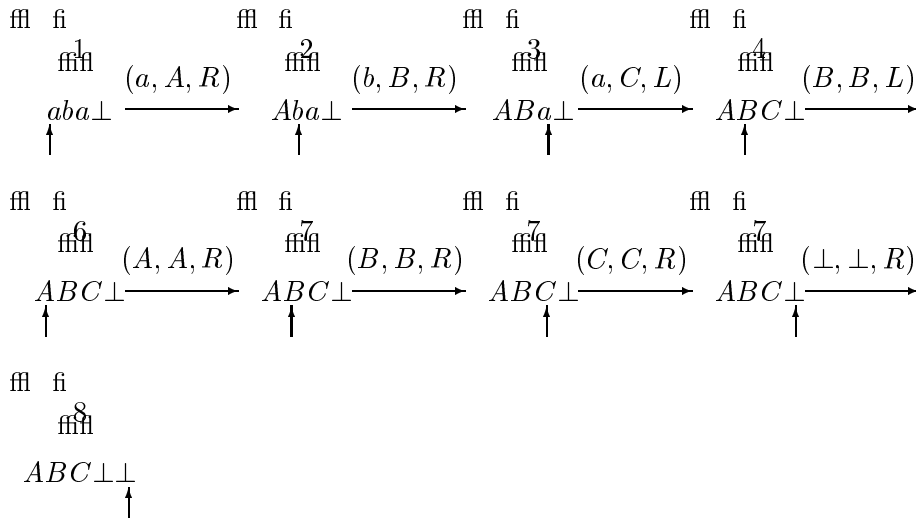
Преди да обясним по-подробно програмата, да разгледаме работата на машината M_6 върху входните думи aba и $aabab$. За целта последователно ще опишем съдържанието на лентата във вид на думи от азбуката $V \cup W = \{a, b, A, B, C, \perp\}$.

На Фиг.3.6.4 и Фиг.3.6.5 са показани редиците от състояния, през които минава M_6 и съдържанието на лентата при работа върху тези думи.

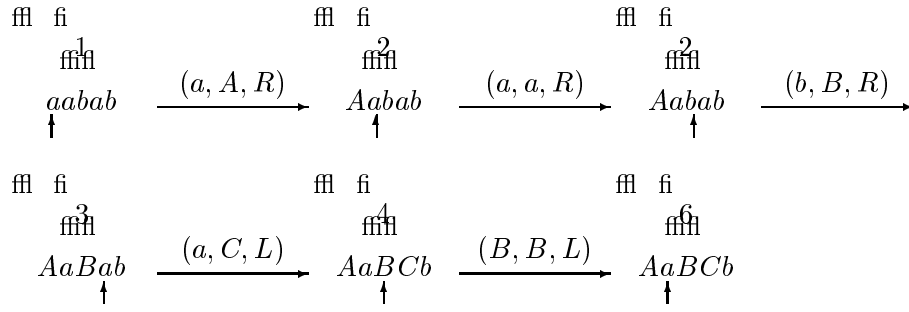
Насочената нагоре стрелка показва върху коя буква е позиционирана главата на машината, а числото в кръгчето над съответната дума показва номера на състоянието на програмата в текущия момент.

Вижда се, че думата aba се разпознава от M_6 , тъй като работата ѝ завършва в крайно състояние 8, докато думата $aabab$ се отхвърля, тъй като програмата достига до състояние 6, главата на машината е позиционирана върху клетка със съдържание a и не може да продължи работата си.

Сега не е трудно да съобразим, че M_6 разпознава езика L . Наистина от началното състояние до състояние 4 се заменят последователно най-лявото a с A , най-лявото b с B и следващото след него най-ляво a с C . След това в състояние 5 започва позициониране отново върху най-лявото a и описаната по-горе процедура се повтаря.



Фиг. 3.6.4



Фиг. 3.6.5

В състояние 4, след като се изчерпят всички a -та след b -тата във входната дума ω се проверява дали всички b -та са заместени с B и в този случай се преминава в състояние 6, където се проверява дали всички a -та са заместени с A и се отива в състояние 7. Тук се проверява дали след всички C -та има още букви от входната дума не заместени с буква от азбуката $W = \{A, B, C\}$. Ако такива не съществуват, то се стига до състояние 8 и ω се разпознава от M_6 . Следователно M_6 стига в състоянието 8 точно тогава когато ω е от вида

$$\omega = a^n b^n a^n, \quad n \geq 1.$$

Ще покажем, че машините на Пост, машините на Тюринг и крайните детерминирани машини с два стека са еквивалентни, т.е. разпознават едни и същи формални езици.

Теорема 3.6.1 (Теорема на Пост) *За всяка машина на Пост съществува еквивалентна на нея машина на Тюринг и обратно за всяка машина на Тюринг съществува еквивалентна на нея машина на Пост.*

Доказателство: Нека M_1 е машина на Тюринг, която работи с произволно взета входна дума ω над V . Ще опишем машината на Пост, която работи по същия начин, както M_1 при стойност на входната променлива $x = \omega$.

Да предположим, че на определен такт лентата на M има следното съдържание

a_1	w_1	a_2	a_3	a_4	w_2	a_5	\perp	$\cdot \cdot \cdot$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	---------	---------------------

↑

като ω_1 и ω_2 са думи над $V \cup W \cup \{\perp\}$, които тук за краткост са поставени в по-една клетка.

В същия момент, машината на Пост ще има за стойност на своята променлива следната дума

$$x = a_3 a_4 \omega_2 a_5 \# a_1 \omega_1 a_2.$$

Очевидно тази стойност на x се определя еднозначно от съдържанието на лентата на машината M и обратно, от стойността на x , може еднозначно да се възстанови съдържанието на лентата.

Да разгледаме двете възможности за следващия такт на машината на Тюринг M :

(i) на програмата следващият ход се определя от тройката (a_3, α, R) . В този случай машината на Пост ще промени стойността на x и тя става

$$x = a_4 \omega_2 a_5 \# a_1 \omega_1 a_2 \alpha,$$

което се реализира с операторите $x := \mathbf{tail}x$ и $x := x\alpha$.

(ii) на програмата следващият ход се определя от тройката (a_3, α, L) . Тогава стойността на x става $x = a_2 \alpha a_4 \omega_2 a_5 \# a_1 \omega_1$, което може да се реализира, чрез последователност от оператори в машината на Пост.

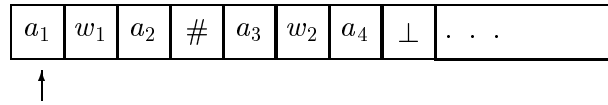
(Опитайте се да съставите алгоритъм за преобразуване на думата $a_3 a_4 \omega_2 a_5 \# a_1 \omega_1 a_2$ в думата $a_2 \alpha a_4 \omega_2 a_5 \# a_1 \omega_1$, чрез машината на Пост).

Да забележим, че ако x има стойност $a_3 \# a_1 \omega_1 a_2$ и следващият ход на машината на Тюринг е (a_3, α, R) , то това значи, че главата на машината на Тюринг се позиционира върху

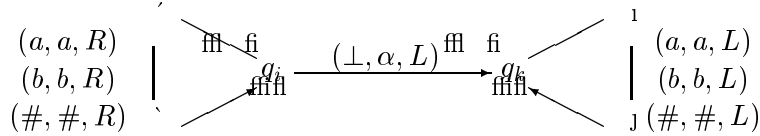
най-лявата клетка със символа \perp и следователно x ще получи стойност $\perp \# a_1 \omega_1 a_2$. Също така, ако x има стойност $a_3 a_4 \omega_2 a_5 \#$ и следващият ход на машината на Тюринг е (a_3, α, L) това ще означава, че главата на машината на Тюринг е позиционирана върху най-лявата клетка на лентата и предстои движението ѝ са една клетка наляво, което е невъзможно. Естествено в този случай машината на Пост спира с оператора **reject**.

Очевидно, получената машина на Пост е над азбуката $V \cup W \cup \{\perp\}$, но тя може да се представи и като машина над азбуката $V \cup \{\#\}$. (Опитайте се да получите поне едно такова представяне).

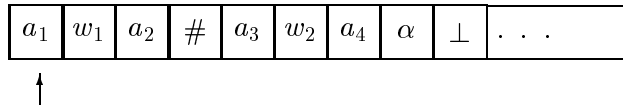
Нека сега M_2 е машина на Пост и ω е произволна дума над V . Да предположим, че M_2 започва работа с начална стойност на своята променлива $x = \omega$. Да приемем, че текущата стойност на x , след определен брой тактове (може и в началото на своята работа) е $\omega = a_1 \omega_1 a_2 \# a_3 \omega_2 a_4$. На тази стойност на x съответствува следното съдържание на лентата на машината M_3 на Тюринг, която искаме да опишем



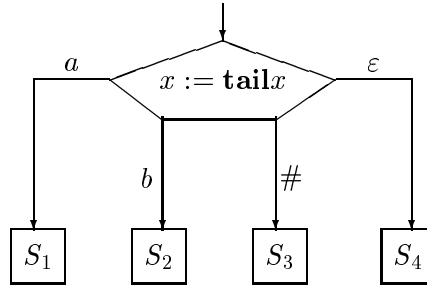
Да предположим, че върху думата $x = \omega$, машината на Пост трябва да изпълни оператора $x := x\alpha$, където α е някоя от буквите a, b или символа $\#$. Тогава, ако програмата на M_3 е в състояние q_i , тя продължава своето изпълнение, като се използва следния фрагмент от нея



След изпълнението на този фрагмент, лентата ще има следното съдържание

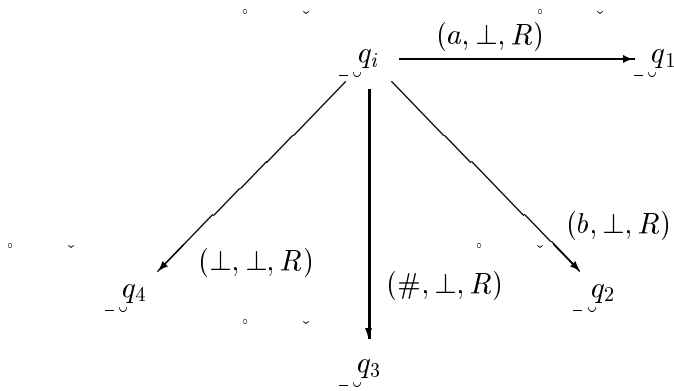


Нека сега машината на Пост да трябва да изпълни върху думата x следния оператор



където S_1, S_2, S_3 и S_4 са оператори.

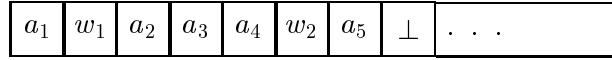
Тогава програмата на M_3 продължава изпълнението със следния фрагмент



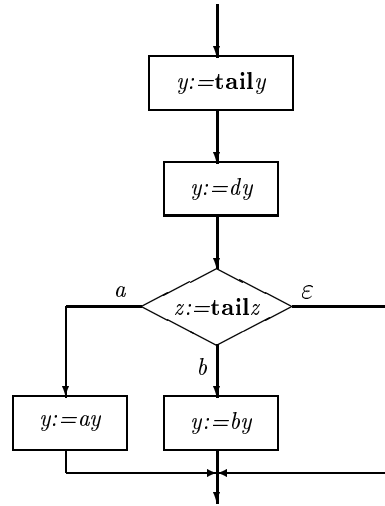
В състоянията q_j за $j = 1, 2, 3, 4$ са "описани" операторите S_1, S_2, S_3 и S_4 от машината на Пост. Очевидно M_2 и M_3 работят по един и същи начин върху думата ω , което доказва теоремата. \square

Теорема 3.6.2 (Теорема на Мински) *За всяка машина на Тюринг съществува еквивалентна на нея крайна машина с два стека и обратно.*

Доказателство: Нека M_1 е машина на Тюринг над V . Да построим крайна машина M_2 с два стека y и z , която да е еквивалентна на M_1 . Да предположим, че лентата на M_1 има следното съдържание



като ω_1 и ω_2 са думи над V и тук за краткост са поставени в по една клетка.



Фиг. 3.6.6

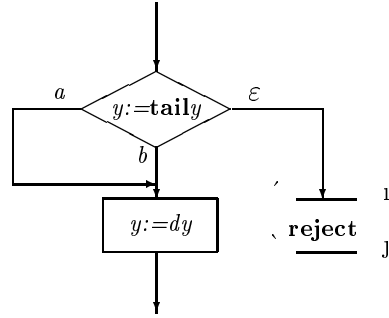
За това съдържание на лентата на M_1 , стековете y и z имат съдържание съответно $y = a_3 a_2 \omega'_1 a_1$ и $z = a_4 \omega_2 a_5$, като ω'_1 е думата получена от ω_1 , чрез написването ѝ в обратен ред. Ако в програмата на M_1 се предписва за следващия ход (a_3, d, R) , където d е буква от V или \perp , то стековете на M_2 добиват следните стойности $y = a_4 d a_2 \omega'_1 a_1$ и $z = w_2 a_5$.

Тези стойности се достигат, чрез операторите в M_2 , зададени на Фиг.3.6.6 и $z := \text{tail}z$.

Да отбележим, че тези оператори са изпълними независимо от съдържанието на двата стека y и z .

Ако следващият ход на M_1 е (a_3, d, L) , то стековете добиват стойностите $y = a_2\omega_1a_1$ и $z = da_4\omega_2a_5$.

Това може да се осъществи, чрез следните оператори в M_2



Фиг. 3.6.7

Да отбележим, че ако стекът y е бил празен, то машината M_2 не може да продължи своята работа, което съответствува точно на ситуацията, когато главата на машината на Тюринг M_1 е позиционирана върху най-лявата клетка и трябва да се придвижи на ляво.

Следователно M_2 разпознава същия език, който разпознава и M_1 .

Нека сега M_3 е крайна машина с два стека, на която променливата и стековете имат текущи стойности $x = a_1a_2\dots a_r$, $y = b_1b_2\dots b_s$ и $z = c_1c_2\dots c_t$. За описанието на машината на Тюринг M_4 , нека да съпоставим на тези стойности на x, y и z следното съдържание на лентата

a_1	\dots	a_r	$\#$	b_1	c_1	\dots	b_t	c_t	b_{t+1}	\perp	b_{t+2}	\perp	\dots	b_s	\dots
-------	---------	-------	------	-------	-------	---------	-------	-------	-----------	---------	-----------	---------	---------	-------	---------

при $t \leq s$. Аналогично, ако $s \leq t$ се съобразява какво ще бъде съдържанието на лентата.

На операторите върху y и z от M_3 отговарят съответните на тях операции върху клетките с нечетни или четни номера, започвайки от клетката със съдържание $\#$.

Доказателството, че M_3 и M_4 са еквивалентни предоставяме за самостоятелно упражнение.

Без доказателство ще отбележим, че крайните машини с два стека са еквивалентни на недетерминирани крайни машини с два стека, а също така и на крайните машини с повече от два стека.

Този факт и теоремите на Пост и Мински са в основата на една хипотеза, известна като тезис на Чърч, според който машината на Тюринг, може да се разглежда като най-универсално устройство за смятане.

Нека $L \subset V^*$ е формален език над азбуката $V = \{a, b\}$.

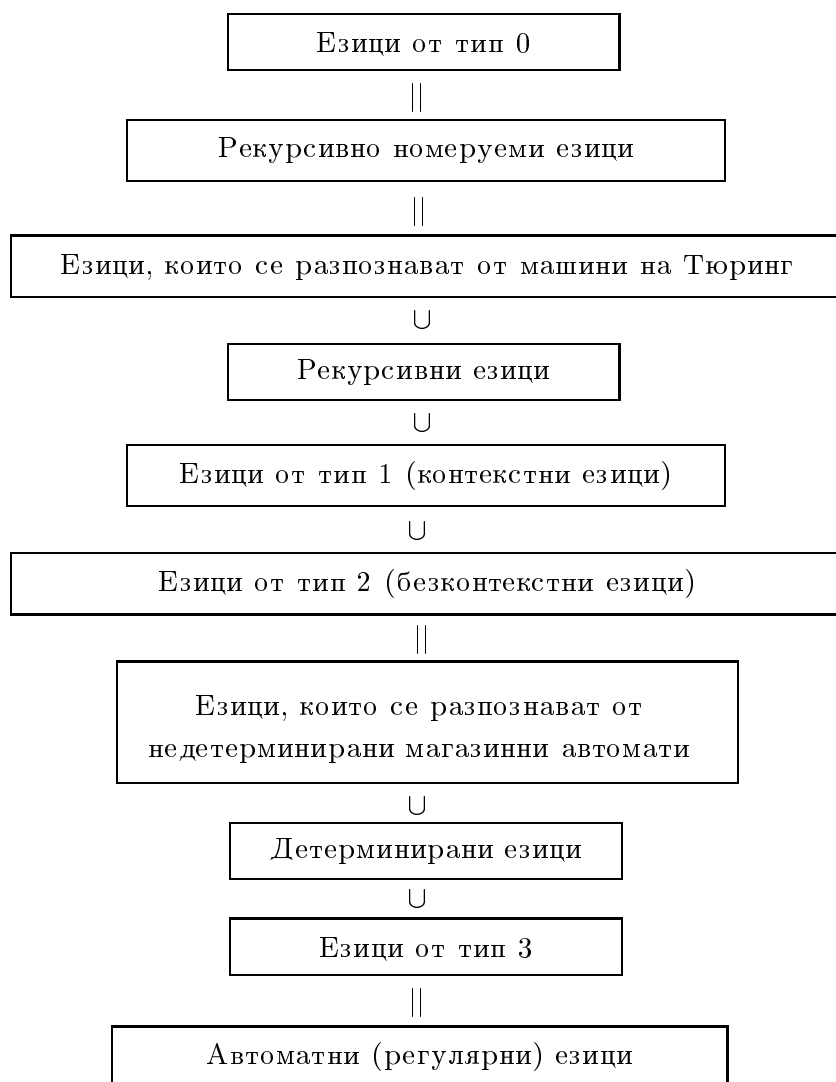
Определение 3.6.5 *Ще казваме, че L е рекурсивно номеруем език, ако съществува машина на Тюринг M , за която*

$$L = \text{admit}(M) \quad \text{и} \quad V^* \setminus L = \text{reject}(M) \cup \text{loop}(M).$$

Определение 3.6.6 *Ще казваме, че L е рекурсивен език, ако съществува машина на Тюринг M , за която*

$$L = \text{admit}(M) \quad \text{и} \quad V^* \setminus L = \text{reject}(M),$$

Да отбележим, че всички рекурсивни езици са рекурсивно номеруеми, а също така, че съществуват езици, които са рекурсивно номеруеми, но не са рекурсивни. Формалните езици над азбуката V могат да се опишат, чрез следната йерархична схема:



З а д а ч и

1. Да се построи машина на Тюринг, която разпознава аритметичните изрази на три променливи (букви).
2. Да се построи крайна машина с един стек и машина на Пост, които разпознават езика, породен от граматика със следните правила:
 - а) $S \rightarrow A, A \rightarrow a|bA|cAA$;
 - б) $S \rightarrow aS|Sb|ScS|a$.
3. Да се построи машина на Тюринг и крайна машина с два стека, които разпознават езика, породен от граматика със следните правила:
 - а) $S \rightarrow SBC|aA, BC \rightarrow bC|ab, C \rightarrow aA|b, A \rightarrow aBC$;
 - б) $S \rightarrow AaB|aAb, aB \rightarrow Ab|ab, Ab \rightarrow aB|ab$.
4. Да се построи машина на Пост, която на всяка дума $a_1a_2 \dots a_s$ над азбуката $\{a, b\}$ съпоставя думата:
 - а) $a_s a_{s-1} \dots a_1$;
 - б) $a_1 b a_2 \dots a_s$;
 - в) $a_s a_1 a_2 \dots a_{s-1}$;
 - г) $a_s b a_2 \dots a_{s-1} a_1$.
5. Да се построи машина на Тюринг и машина на Пост, които разпознават следните езици:
 - а) $L = \{a^n b a^n \mid n \geq 0\}$;
 - б) $L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\}$.