

## 4.8 Критерий за пълнота

Критерият за пълнота дава възможност да разпознаем дали едно множество от двоични функции е пълно или не е пълно. За всяко крайно множество от функции проверката може да бъде извършена с краен брой стъпки. Критерият е открит от американския математик Е. Пост, а по-късно от руският математик С. В. Яблонски.

**Теорема 4.8.1 (Критерий за пълнота)** *Необходимото и достатъчно условие множеството от двоични функции  $F$  да е пълно е да не се съдържа изцяло в нито едно от множествата  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$ .*

**Доказателство:** *Необходимост.* Да предположим, че  $F$  е пълно множество и се съдържа изцяло например в  $T_0$ . Тогава  $F \subseteq T_0$  и  $P_2 = [F] \subset [T_0] = T_0 \neq P_2$ , което е невъзможно.

*Достатъчност.* Тъй като в  $F$  има функции  $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_s \notin S, f_m \notin M$  и  $f_l \notin L$ , от теорема ?? следва, че пълната система  $x_1 x_2, \bar{x}_1$  се реализира с формула над  $F$ .  $\square$

От критерия за пълнота може да се получат важни следствия.

**Определение 4.8.1** *Множеството  $A$  ще наричаме **предпълно**, ако  $[A] \neq P_2$ , но за всяка  $f \notin A$  е в сила  $[A \cup \{f\}] = P_2$ , т.е. с прибавянето към  $A$  на произволна функция, която не е от  $A$ , то става пълно множество от двоични функции.*

**Теорема 4.8.2** *Всяко предпълно множество е затворен клас.*

**Доказателство:** Да допуснем, че  $A$  не е затворен клас и е предпълно множество. От  $A \subset [A]$  и  $A \neq [A]$  следва, че има такава функция  $f \in [A]$ , за която  $f \notin A$ . Тогава получаваме

$$A \cup \{f\} \subseteq [A] \text{ и } P_2 = [A \cup \{f\}] = [A] \neq P_2,$$

което е невъзможно.

**Теорема 4.8.3** *Предпълни класове са точно множествата  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$ .*

**Доказателство:** Всеки предпълен клас е затворен, а произволен затворен клас, различен от  $P_2$ , трябва или да съвпада с  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$ , или да се съдържа изцяло в някой от тях. Да допуснем, че  $A$  е предпълен клас, който е собствено подмножество например на  $T_0$ . Тогава има такава функция  $f$ , че  $f \in T_0$  и  $f \notin A$ . Получаваме  $A \cup \{f\} \subset T_0$  и

$$P_2 = [A \cup \{f\}] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2,$$

което е невъзможно. Следователно предпълни класове може да са само  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$ .  $\square$

За докажем, че  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$  са предпълни класове, трябва да покажем, че във всеки от тях се съдържат функции, които не принадлежат на останалите четири класа. Това се вижда от таблица 4.7, в която с " + " е отбелязана принадлежността към даден клас, а с " - " е отбелязана непринадлежността.

Таблица 4.7

	$T_0$	$T_1$	$S$	$L$	$M$
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	+	-
$x_1 x_2$	+	+	-	-	+
$x_1 + x_2 + x_3$	+	+	+	+	-
$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$	+	+	+	-	+

Ясно, е че  $\exists g \notin T_0$ . Ако  $g \notin T_0$  ще докажем, че  $[T_0 \cup \{g\}] = P_2$ . Достатъчно е да докажем, че

$$T_0 \cup \{g\} \not\subset T_0,$$

$$T_0 \cup \{g\} \not\subset T_1,$$

$$T_0 \cup \{g\} \not\subset S,$$

$$T_0 \cup \{g\} \not\subset M,$$

$$T_0 \cup \{g\} \not\subset L.$$

От условието  $g_0 \notin T_0$  и таблица 4.7 се вижда верността на горните условия. Останалите класове  $T_1, S, M$  и  $L$  се третират

подобно на  $T_0$ .

**Определение 4.8.2** Нека  $A$  е затворен клас. Ако  $[F] = A$ , ще казваме, че множеството двоични функции  $F$  е **пълно** **относно**  $A$ . Ако освен това никое собствено подмножество на  $F$  не е пълно **относно**  $A$ , ще наричаме  $F$  **база на**  $A$ . Когато  $F$  е база на  $P_2$ , ще го наричаме просто **база**.

**Теорема 4.8.4** Всяка база съдържа не повече от четири функции.

**Доказателство:** Достатъчно е да покажем, че всяко пълно множество  $F$  съдържа пълно подмножество  $F'$  от не повече от четири функции. Тъй като  $F$  е пълно в него има  $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_s \notin S, f_m \notin M$  и  $f_l \notin L$ . Подмножеството  $F'' = \{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$  е пълно и се състои от не повече от пет функции (защото някои от избраните функции могат да съвпадат). Ще покажем как можем да намалим функциите от  $F''$  с още една.

Тъй като  $f_0 \notin T_0$ , то  $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$ . Имаме два случая –  $f_0(1, 1, \dots, 1) = 0$  или  $f_0(1, 1, \dots, 1) = 1$ . В първия случай  $f_0$  е и немонотонна и  $F' = \{f_0, f_1, f_s, f_l\}$  е пълно множество, а във втория  $f_0$  е несамодвойственна и  $F' = \{f_0, f_1, f_m, f_l\}$  е пълно.  $\square$

Не е трудно да се види, че съществуват бази с точно четири функции и в този смисъл горната теорема не може да се усили. Пример на такава база е  $\{0, 1, x_1x_2, x_1 + x_2 + x_3\}$ .

В началото на параграфа споменахме името на Е. Пост. В действителност той успя да получи значително по-силен резултат от критерия за пълнота, като построи и класифицира всички затворени класове от двоични функции. За всеки затворен клас той описа поне една негова база.