

## Глава 1

### Основни математически понятия.

#### Множества, релации, графи

##### 1.1 Множества. Операции с множества

За целите, които си поставя настоящата книга е достатъчна представата от "наивната" теория на множествата, развита от Г. Кантор. Според него: "Под множество ще разбираме сбор от определени, различни помежду си обекти (реални или въображаеми), наречени елементи на множеството, разгледани в тяхната общност."

Ще предполагаме, че всички разглеждани множества при решаването на даден проблем са подмножества на едно *универсално множество*, което ще бележим с  $\mathcal{U}$ .

Един от начините на задаване на множествата е, като се изброят всичките им елементи и се отделят с някакъв разделител (най-често запетая), както например е за следното множество  $A = \{-1, 0, 2\}$ . Такова задаване на множествата се нарича *конструктивно*. Да отбележим, че при конструктивното задаване на множествата, техните елементи се записват само по веднъж. Оказва се, че не всяко множество може да бъде зададено по конструктивен начин.

Например, множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$  не може да бъде зададено така, тъй като колкото и реални числа да напишем в скобите, винаги ще се намери реално число, което не сме записали. Такива множества се задават, чрез условие, което се удовлетворява единствено от елементите на това множество.

Например, множеството

$$B = \{x \mid x \text{ е реално и } x > 1\}$$

се задава от условието " $x$  е реално и  $x > 1$ ". Този начин на задаване, често се нарича *описателен* или *дескриптивен*.

Ако  $x$  е елемент на множеството  $A$ , това често бележим с  $x \in A$  и казваме че " $x$  принадлежи на  $A$ " (или, че  $x$  е от  $A$ ). Когато  $x$  не принадлежи на  $A$ , това се означава с  $x \notin A$ .

Особена роля в теория на множествата играе *празното множество*  $\emptyset$ . Това е множество, което не съдържа нито един елемент.

**Определение 1.1.1** Ще казваме, че множеството  $A$  е **подмножество** на  $B$  и ще пишем  $A \subset B$ , ако всеки елемент от  $A$  принадлежи на  $B$ . Когато  $A$  не е подмножество на  $B$  ще пишем  $A \not\subset B$ .

Съвкупността от всички подмножества на множеството  $A$  ще бележим с  $P(A)$  или  $2^A$ .

Да отбележим, че за всяко множество  $A$  е в сила  $\emptyset \subset A$  и  $A \subset \mathcal{U}$ .

Когато  $A \subset B$  и  $A \neq B$  казваме, че  $A$  е *собствено подмножество* на  $B$ .

**Определение 1.1.2** Две множества  $A$  и  $B$  ще наричаме **равни** и ще пишем  $A = B$ , ако се състоят от едни и същи елементи.

Очевидно  $A = B$  точно тогава, когато  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

Основните операции с множества са:

- *едночленната операция допълнение*  $(-)$
- *двучленните операции — обединение*  $(\cup)$ , *сечение*  $(\cap)$  и *разлика*  $(\setminus)$ .

Да предположим, че  $A$  и  $B$  са две множества от елементи, взети от някое универсиално множество  $\mathcal{U}$ . Тогава горните операции се определят по следния начин:

$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$  – това множество съдържа всички елементи на  $\mathcal{U}$ , които не са елементи на  $A$ ;

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$  – съдържа всички елементи, които са или в  $A$  или в  $B$ ;

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$  – съдържа всички елементи, които са и в  $A$  и в  $B$  едновременно;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$  – съдържа елементите на  $A$ , които не са в  $B$ .

**Пример 1.1.1** Нека  $\mathcal{U}$  е множеството от десетичните цифри, т.е.  $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , като  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  и  $B = \{0, 2, 4, 6, 7\}$ . Тогава

$$\overline{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\},$$

$$A \cap B = \{7\} \text{ и}$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5, 9\}.$$

Очевидно операцията разлика, може да се изрази, чрез останалите операции. Една такава възможност се състои в следното равенство

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

което следва непосредствено от дефинициите на съответните операции. Ето защо е достатъчно да опишем само свойствата на операциите допълнение, сечение и обединение.

За всеки три множества  $A, B$ , и  $C$  са в сила следните свойства:

1. *Асоциативност* на обединение и сечение

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2. *Комутативност* на обединение и сечение

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

3. *Свойства на допълнението*

$$A \cup \overline{A} = \mathcal{U};$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

4. Свойства за повторение

$$A \cup A = A;$$

$$A \cap A = A.$$

5. Свойства на празното и универсално множества

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U};$$

$$A \cap \mathcal{U} = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

6. Закони на Де Морган

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. Дистрибутивност на обединението и сечението

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

8. Свойства за поглъщане

$$(A \cup B) \cap B = B;$$

$$(A \cap B) \cup B = B.$$

Поради асоциативността на обединението и сечението, повечето от горните свойства могат да се разпространят и в равенства, в които участват повече от три множества.

Свойствата от 1 до 8 могат да се докажат, като се използват дефинициите на операциите допълнение, обединение и сечение.

Законите на Де Морган показват, че свойствата на  $\cup$  се получават от свойствата на  $\cap$  и  $\neg$ , също така свойствата на  $\cap$

могат да се изведат от свойствата на  $\cup$  и  $\overline{\phantom{x}}$ . Това се вижда от равенствата

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A \cap B}}$$

и

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}.$$

### З а д а ч и

1. Да се посочат елементите на множествата:

$$A = \{\{1, 2\}, 3\}, \quad B = \{a, \{a, b\}, \{a\}\}, \quad C = \{0, \{0\}\}.$$

2. Кой от следните твърдения са верни?

- а)  $1 \in \{1, 2, 3\}$ ;
- б)  $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$ ;
- в)  $1 \in \{\{1, 2\}, \{1\}\}$ ;
- г)  $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, \{3, 4\}\}$ ;
- д)  $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, \{2\}, 3\}$ .

3. Да се провери верността на равенствата:

- а)  $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = A \cap B \cap C$ ;
- б)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ;
- в)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ ;
- г)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ;
- д)  $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ ;
- е)  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ ;
- ж)  $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ .