

1.5 Крайни и безкрайни множества. Изброими и неизброими множества

Определение 1.5.1 Ще казваме, че две множества A и B са **равномощни** и ще пишем $A \sim B$, ако съществува биективно изображение $f: A \rightarrow B$ между тях.

От свойствата на биективните изображения следва, че релацията равномощност е еквивалентност.

Пример 1.5.1 Нека ABC е произволен триъгълник и точката P лежи върху страната AB (Фиг. 1.5.1). Отсечката MN е успоредна и равна на отсечката PB .

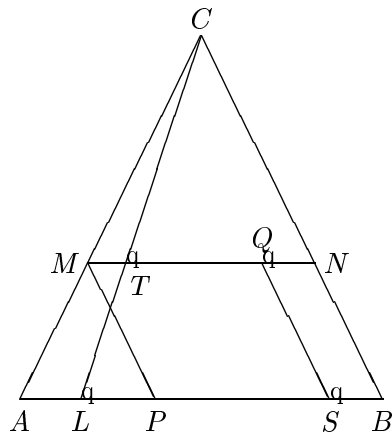
Да разгледаме следните две изображения между отсечки

$$f_1: \begin{cases} MN \rightarrow PB \\ Q \rightarrow S, \end{cases}$$

като S е точка, за която $QSBN$ е успоредник и

$$f_2: \begin{cases} AB \rightarrow MN \\ L \rightarrow T, \end{cases}$$

като T е пресечена точка между LC и MN .



Фиг. 1.5.1

Очевидно, при дадени Q и L , точките S и T с посочените свойства съществуват и са единствени. Следователно f_1 и f_2 са инективни изображения. От друга страна, за всеки две точки S и T от отсечките PB и MN съществуват точки Q и L така, че $f_1(Q) = S$ и $f_2(L) = T$, т.е. f_1 и f_2 са сюрективни изображения и следователно са биективни. Съгласно дефиницията за равномошни множества следва, че $AB \sim MN$ и $MN \sim PB$.

От транзитивното свойство следва, че $AB \sim PB$. От друга страна, когато P е вътрешна точка за AB ще следва, че PB е собствено подмножество на отсечката AB . Следователно отсечката AB е равномошна на свое собствено подмножество – отсечката PB .

Нека f е изображение от A в B и X е произволно подмножество на A , т.е. $X \subset A$. С $f(X)$ ще означаваме множеството

$$f(X) = \{y \in B \mid \text{съществува } x \in X \text{ така, че } f(x) = y\},$$

т.е. $f(X)$ е множеството от образите на всички елементи от X при изображението f . За произволно естествено число i при $B \subset A$ полагаме

$$f^i(X) = f(f^{i-1}(X)).$$

С f/X ще означаваме изображението $g : X \rightarrow B$, за което $g(x) = f(x)$ при $x \in X$. Често изображението f/X се нарича *рестрикция* (*ограничение*) на f върху множеството X .

Теорема 1.5.1 (Кантор-Шрьодер-Бернщайн) Ако A и B са множества, за които съществуват инективни изображения

$$g : A \rightarrow B \quad \text{и} \quad h : B \rightarrow A, \quad \text{то } A \sim B.$$

Доказателство: Да разгледаме най-напред случая, когато $A \subset B$ и $g(x) = x$ за всяко $x \in A$. Нека $C = B \setminus A$. Да забележим, че ако $i \neq j$, то $h^i(C) \cap h^j(C) = \emptyset$. (Защо?) Да положим

$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} h^i(C)$. Тогава, ако $P = h(Q)$, то следващите равенства са очевидни:

$$Q = h(C) \cup P \quad \text{и} \quad h(C) \cap P = \emptyset.$$

Тъй като h е инективно следва, че изображенията

$$h/Q : Q \rightarrow P \quad \text{и} \quad h/C : C \rightarrow h(C)$$

са биективни (Проверете!). Следователно $P \sim Q$ и $C \sim h(C)$, а от горните равенства получаваме

$$Q \sim C \cup Q \quad \text{и} \quad C \cap Q = \emptyset.$$

Да положим $M = A \setminus Q$ и тогава $B = Q \cup M \cup C$, като $M \cap Q = M \cap C = \emptyset$. Сега от

$$Q \cup M \sim C \cup Q \cup M \quad \text{следва} \quad A \sim B.$$

Да разгледаме общия случай и да положим $A' = g(A)$, като $A' \subset B$. Изображението $f : B \rightarrow A'$ дефинирано с равенството

$$f(y) = g_1(h(y)), \quad \text{където} \quad g_1 = g/h(B)$$

е инективно изображение на B в A' и понеже g_1 е биективно изображение на A в A' от $A' \subset B$ следва, че $A' \sim A$ и $A \sim B$. \square

Ако множеството A се състои от n елемента, то множеството $P(A)$ от всичките му подмножества се състои от 2^n елемента. Това означава, че A и $P(A)$ не са равномощни. Този факт е частен случай на следната теорема.

Теорема 1.5.2 (Кантор) *Ако A е произволно множество, то A и $P(A)$ не са равномощни.*

Доказателство: Да допуснем противното, т.е. че съществува биективно изображение $f : A \rightarrow P(A)$. За достигане до противоречие, да положим

$$X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

Тъй като $X \in P(A)$ и f е биективно следва, че съществува $a \in A$ така, че $f(a) = X$. За елемента a има две възможности:

(i) $a \in X$. От дефиницията на X следва, че $a \notin f(a)$. Но $f(a) = X$ и следователно $a \notin X$, което е противоречие, т.е. $a \in X$ е невъзможно;

(ii) $a \notin X$. Отново като вземе предвид, че $X = f(a)$ следва, че $a \notin f(a)$, а от дефиницията на X получаваме, $a \in X$, което е противоречие. \square

В края на миналия и началото на настоящия век "почти изградената" теория на множествата претърпява няколко "удара", които довеждат до изменения в цялостната картина от развитето на математиката – това са различните парадокси в теорията. Първият парадокс в теорията на множествата е намерен от нейният създател Георг Кантор, въпреки че дълго време той не е съобщавал за него.

Парадокс на Кантор. *Не съществува множество A със свойството, че за всяко множество B , съществува инективно изображение на B в A .*

Доказателство: Да допуснем противното и да положим $B = P(A)$. Следователно съществува инективно изображение $f : P(A) \rightarrow A$. От друга страна изображението $g : A \rightarrow P(A)$, определено с равенството $g(x) = \{x\}$ за всяко $x \in A$ е инективно. От *Теоремата на Кантор-Шрьодер-Бернщайн* следва, че $A \sim P(A)$, което противоречи на *Теоремата на Кантор*. \square

Парадоксалното в това твърдение се състои във факта, че не съществува "най-голямо" множество, т.е. множество, в което всяко друго множество да бъде вложено. От тук следва, че "множеството от всички множества" всъщност не е множество, а някакъв друг обект, тъй като в противен случай то би било множество A , което да опровергае *Парадокса на Кантор*.

Не по-малко "ефектен" е и *парадоксът на Ръсел* (по името на Бертран Ръсел, който е открил този парадокс).

Парадокс на Ръсел. Да разгледаме следното множество $A = \{B \mid B \text{ е множество и } B \notin B\}$. За A не е вярно нито едно от двете възможни твърдения $A \in A$ или $A \notin A$.

Доказателство: Наистина ако $A \in A$, то съгласно определението на множеството A следва, че A е множество и $A \notin A$ – противоречие. Ако $A \notin A$, то отново от определението следва, че ако A е множество, то $A \in A$, което е противоречие. \square

Горните разсъждения показват, че определението на A не е определение на множество, а A е някакъв друг математически обект.

Появата на парадоксите довежда до разглеждането на понятието "клас" като първично понятие.

Да отбележим, че от Парадокса на Ръсел, може да се изведе Парадокса на Кантор (Как?).

Определение 1.5.2 Едно множество се нарича **безкрайно**, ако е равномошно на свое собствено подмножество.

Множеството от точки в отсечката AB от Пример 2.5.1 е безкрайно. (Защо?)

Пример 1.5.2 Тъй като изображението

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_2 \\ n \rightarrow 2n \end{cases}$$

е биективно изображение на множеството \mathbb{N} в собственото му подмножество \mathbb{N}_2 от четните естествени числа следва, че \mathbb{N} е безкрайно.

Когато две множества са равномощни се казва още, че имат *равни мощности*.

Множества, които не са безкрайни се наричат *крайни*.

Пример 1.5.3 Множеството $A = \{0, 1, 2\}$ е крайно, тъй като не съществува биекция между A и негово собствено подмножество.

При крайните множества, броят на техните елементи представлява тяхната мощност. За мощността на дадено множество A се използва означението $|A|$.

Определение 1.5.3 *Едно множество е изброимо (номерируемо), ако е равномошно на множеството \mathbb{N} на естествените числа или е крайно.*

В известен смисъл безкрайните изброими множества са "най-малките" от всички безкрайни множества. Това е съдържанието на следващата теорема.

Теорема 1.5.3 *Всяко безкрайно множество съдържа безкрайно изброимо подмножество.*

Доказателство: Нека A е произволно безкрайно множество. Да вземем един произволен елемент от A и да го означим с a_1 . Тъй като A е безкрайно, то в A има елементи, различни от a_1 . Да изберем един от тях и да го означим с a_2 . Отново, поради безкрайността на A следва, че A има елементи, различни от a_1 и a_2 . Означаваме един от тях с a_3 и т.н. Множеството A е безкрайно, което се гарантира от неограниченото продължаване на този процес на избор на различни помежду си елементи от A . Така получаваме множеството

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset A.$$

Очевидно изображението

$$f : \begin{cases} B \rightarrow \mathbb{N} \\ a_i \rightarrow i - 1 \end{cases}$$

е биективно. Следователно B е изброимо. □

В сила е и следващата теорема, която характеризира подмножествата на изброимите множества.

Теорема 1.5.4 *Ако множеството A е изброимо и B е негово подмножество, то B е изброимо.* □

Тъй като безкрайните изброими множества са равномощни на \mathbb{N} , често се казва че те имат еднаква мощност с мощността на

множеството на естествените числа \mathbb{N} . За означение мощността на множеството \mathbb{N} , се използва символът \aleph_0 (алеф нула), т.е. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

От предишната теорема следва, че сечението на изброими множества е изброимо множество.

Следващата теорема установява, че свойството изброимост е "устойчиво", в известен смисъл и относно операцията обединение.

Теорема 1.5.5 *Обединението на изброимо много изброими множества е изброимо множество.*

Доказателство: Да отбележим, че изброимо много множества означава, че тези множества могат да бъдат номерирани. Нека множествата A_1, A_2, \dots са изброими и

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\}$$

...

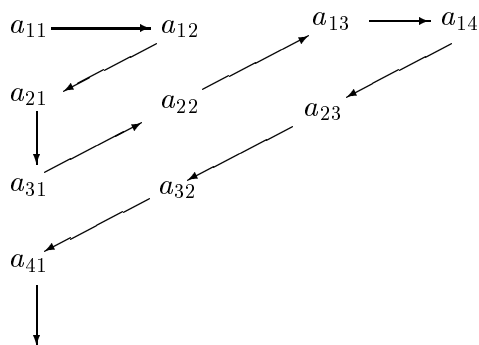
$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$$

...

Без съществено ограничение на общността, да предположим, че $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Да разгледаме изображението $f : \bigcup A_i \rightarrow \mathbb{N}$, дефинирано чрез схемата на Фиг. 1.5.2 или $f(a_{11}) = 0$, $f(a_{12}) = 1$, $f(a_{21}) = 2$, $f(a_{31}) = 3$, $f(a_{22}) = 4$, $f(a_{13}) = 5$ и т.н. Изобщо движейки се по стрелките, заграждаме горния ляв ъгъл на тази "таблица" и на всеки елемент a_{kj} съпоставяме последователно по едно естествено число.

Вижда се, че по този начин на всяко a_{kj} ще бъде съпоставено точно едно естествено число и всяко естествено число е образ на точно едно a_{kj} от $\bigcup A_i$. Следователно $\bigcup A_i$ е изброимо множество. \square



Фиг. 1.5.2

(Как ще се измени доказателството в общия случай?)

Следствие 1 Множеството на рационалните числа е изброимо.

Верността на това твърдение следва от факта, че множеството \mathbb{Q} на рационалните числа, може да се представи като обединение $\bigcup \mathbb{Q}_i$ от множествата \mathbb{Q}_i , които се състоят от всички несъкратими дроби със знаменател i , $i > 0$.

Изброимите множества са основни обекти в дискретната математика. Често те се наричат дискретни множества.

Да се убедим, че съществуват множества, които не са изброими. Такива множества се наричат *неизброими* (*непрекъснати*).

Теорема 1.5.6 Съществуват неизброими множества.

Доказателство: Да разгледаме множеството от реални числа в интервала $[0, 1)$, т.е. множеството

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

Доказателството, че A не е изброимо, ще направим чрез така наречения *диагонален принцип* или *метод на Кантор*.

Да допуснем, че A е изброимо. Следователно елементите му могат да бъдат номерирани, т.е.

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}.$$

Да забележим, че всички числа от A могат да се представят, като безкрайна десетична дроб с нулева цяла част, т.е.

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

...

$$\alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$

...

където a_{ij} са числа, за които $0 \leq a_{ij} \leq 9$. Понеже разглеждаме множеството по допускане е изброимо, всеки елемент от него се среща в тази редица. Да разгледаме реалното число $b = 0, b_1b_2b_3\dots$, където

$$(1) \quad b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1, & \text{ако } a_{ii} < 8, \\ 0, & \text{ако } a_{ii} \geq 8, \text{ за } i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Очевидно $0 \leq b < 1$. Но числото b не се среща в редицата $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Наистина, да предположим, че $b = \alpha_k$ за някое естествено k . Следователно, всички (в частност и k -тите) цифри на b и α_k ще съвпадат, т.е. $b_k = a_{kk}$.

Това противоречи на избора на цифрите на b , чрез равенствата (1). Следователно $b \neq \alpha_k$, за всяко естествено k . Понеже $b \in [0, 1)$ следва, че допускането ни не е вярно, т.е. $[0, 1)$ не е изброимо множество. \square

Мощността на множеството A от Теорема 2.5.6 се бележи с \aleph_1 (алеф едно) и се нарича *мощност на континуума*.

Може да се докаже, че $|\mathbb{R}| = \aleph_1$.

З а д а ч и

1. Да се докаже, че ако $|A| = n$, n -естествено, то $|P(A)| = 2^n$.
2. Нека A и B са две крайни множества. Да се докаже, че броят на изображенията на A в B е $|B|^{|A|}$.

3. Да се докаже, че ако едно множество A има безкрайно подмножество, то и A е безкрайно.
4. Да се докаже, че ако A е изброимо, то $A \times A$ е изброимо.
5. Да се докаже, че ако A и B са крайни множества, то $A \cup B$ и $A \cap B$ са крайни множества.
6. Да се докаже, че $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C$ за всеки три множества A, B, C .