

4.7 Линејни функции. Затворен клас L

Теорема 4.3.3 гласи, че всяка двоична функция се представя от точно един полином на Жегалкин.

Определение 4.7.1 *Ще казваме, че $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е **линейна**, ако нейният полином на Жегалкин е линеен.*

Всеки линеен полином може да се представи във вида

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0,$$

където $a_j \in \{0, 1\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Тъй като при различни избори на a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 получаваме различни полиноми, а следователно и различни функции, броят на линейните функции на n променливи е 2^{n+1} .

Да означим с L множеството от всички линейни функции.

Теорема 4.7.1 *Множеството L е затворен клас.*

Доказателство: От очевидните твърдения:

- а) тъждествената функция е линейна;
 - б) сложна функция $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ на линейни функции f, g_1, g_2, \dots, g_n е също линейна функция, следва, че L е затворен клас.
-

Теорема 4.7.2 *Нека $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_s \notin S, f_m \notin M$ и $f_l \notin L$. Тогава функциите $0, 1, \bar{x}_1$ и $x_1 x_2$ са суперпозиции над $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$.*

Доказателство: От теорема ?? следва, че $\{0, 1, \bar{x}_1\} \subseteq [\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}]$.

Функцията f_l е нелинейна. Следователно в нейния полином на Жегалкин има поне един нелинеен член. Нека този член е $x_1 x_2 x_{j_1} \dots x_{j_k}$, като $x_{j_1} \dots x_{j_k}$ може да отсъствуват.

Полиномът на Жегалкин на функцията f_l има следния вид:

$$f_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k} + \text{останалите нелинейни членове} \\ + \text{линейни членове} + \text{константа.}$$

Да извършим следната замяна на променливи с константи:

- а) променливите $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}$ (ако ги има) да заменим с 1;
- б) останалите променливи без x_1 и x_2 да заменим с 0.

След замяната всички останали нелинейни членове ще станат нули, тъй като в тях има поне една променлива, различна от $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}, x_1, x_2$. Получаваме

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b.$$

Тъй като g е получена от f_l чрез заместване на променливи с константи, то $g \in [\{f_0, f_1, f_s, f_m\}]$. Да положим $x_1 = y_1 + a_2$ и $x_2 = y_2 + a_1$. Получаваме

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2) &= g(y_1 + a_2, y_2 + a_1) = \\ &= (y_1 + a_2)(y_2 + a_1) + a_1(y_1 + a_2) + a_2(y_2 + a_1) + b = \\ &= y_1 y_2 + a_1 a_2 + b. \end{aligned}$$

Функцията h се получава от g чрез преименуване на променливи или евентуално чрез вземане на отрицание на променлива ($y_1 = y_1 + 0, \overline{y}_1 = y_1 + 1$). Тъй като $\overline{x} \in [\{f_0, f_1, f_s, f_l, f_m\}]$, то h е суперпозиция над $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$.

Функцията h е или конюнкцията, или отрицание на конюнкцията. В последния случай с още едно отрицание \overline{x} получаваме конюнкцията. \square

З а д а ч и

1. Покажете кои от функциите $x_1 x_2, x_1 + x_2 + 1, \overline{x}_1, x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ са линейни и кои са нелинейни.
2. Покажете кои са осемте линейни функции на две променливи.
3. Кои линейни функции са монотонни.
4. Кои линейни функции са самодвойствени.
5. Покажете, че всяка линейна функция е суперпозиция над $\{x_1 + x_2, 1\}$.