

2.8 Алгоритми за автоматни граматик

В настоящия параграф ще разгледаме някои алгоритмични проблеми за крайните автомати.

Теорема 2.8.1 *Нека L е автоматен език и $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е минимален автомат, за който $L = L(A)$. Ако $x \in L$ и $|x| \geq |K|$ то съществуват думи u, v, w така, че $x = uvw$, $|v| \geq 1$ и за всяко $i = 0, 1, 2, \dots$ думата $\omega_i = uv^i w$ е дума от L .*

Доказателство: Да допуснем, че $K = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ и нека $|x| \geq n + 1$ и $x \in L$. Следователно, когато A работи с входната дума x ще съществува състояние q , което поне два пъти участва в съответния на x път по графа на A . Това означава, че има думи u, v, w над V така, че

$$\delta(q_0, u) = q, \quad \delta(q, v) = q \quad \text{и} \quad \delta(q, w) \in F.$$

Очевидно за всяко естествено i е в сила $\delta(q, v^i) = q$ и следователно $\delta(q_0, uv^i w) \in F$. \square

Теорема 2.8.2 *Ако е дадена автоматна граматика Γ , то съществува алгоритъм, чрез който се установява дали $L(\Gamma) = \emptyset$.*

Доказателство: Очевидно, ако $L = L(\Gamma) \neq \emptyset$, то съществува дума $\omega \in L$, за която $|\omega| < |K|$, където $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е минимален автомат, за който $L = L(A)$. Следователно $L = \emptyset$ точно тогава, когато A не разпознава нито една дума от V^* с дължина по-малка от $|K|$. Тъй като такива думи са краен брой, то проверката дали те се разпознават от A , може да се извърши в краен брой стъпки за крайно време. \square

Теорема 2.8.3 *Ако Γ_1 и Γ_2 са две автоматни граматик, то съществува алгоритъм, с който се установява дали те са еквивалентни, т.е. дали $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$.*

Доказателство: Очевидно, $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$ точно тогава, когато тези два езика се разпознават от минимални автомати A_1

и A_2 , имащи евентуални различия само в символите, с които са означени техните състояния. Следователно търсеният алгоритъм се състои в построяването на два минимални автомата и тяхното сравняване. \square

Ще казваме, че една граматика е *крайна*, ако тя поражда краен език.

Теорема 2.8.4 *Ако Γ е автоматна граматика, то съществува алгоритъм, чрез който се установява дали Γ е крайна граматика.*

Доказателство: Нека $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е минимален ДКА, за който $L = L(A) = L(\Gamma)$. Ако L има $n + 1$ състояния, то от Теорема 2.8.1 следва, че L е безкрайно множество точно тогава, когато съществува дума $\omega \in L$, за която $|\omega| \geq n + 1$. Да предположим, че такива думи съществуват в L . Измежду всички такива думи в L да изберем думата ω_0 , която има минимална дължина, т.е. $|\omega_0| \geq n + 1$, и за всяка дума $\omega \in L$, за която $|\omega| \geq n + 1$ е в сила $|\omega_0| \leq |\omega|$. Ще докажем, че $|\omega_0| < 2n + 2$. Да допуснем, че това не е така, т.е. $|\omega_0| \geq 2(n + 1)$. От Теорема 2.8.1 следва, че можем да напишем $\omega_0 = \omega_1 \omega_2 \omega_3$, $1 \leq |\omega_2| \leq n + 1$ и $\delta(q_0, \omega_1) = q$, $\delta(q, \omega_2) = q$, $\delta(q, \omega_3) \in F$ за някое $q \in K$. Следователно $\delta(q_0, \omega_1 \omega_3) \in F$, т.е. $\omega_1 \omega_3 \in L$, но $|\omega_1 \omega_3| = |\omega_0| - |\omega_2| \geq 2n + 2 - (n + 1) = n + 1$. Ето защо $|\omega_1 \omega_3| < |\omega_0|$ и $|\omega_1 \omega_3| \geq n + 1$, което противоречи на избора на ω_0 . Следователно, за това дали $L(\Gamma)$ е краен език е достатъчно да се провери, че всички думи $\omega \in V^*$, за които $n + 1 \leq |\omega| < 2n + 2$ (а те са краен брой) не се разпознават от автомата A . \square

Да отбележим, че в доказателството само на Теорема 2.8.3 се използва минималността на съответните крайни автомати и то преди всичко, заради тяхната единственост с точност до преименуване на азбуките от състоянията им.

Разбира се минималността на съответните автомати влияе върху оптималността на алгоритмите (по-малко думи се проверяват), а не върху тяхната коректност.

З а д а ч и

1. Да се докаже, че следните езици не са автоматни

а) $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$;

б) $\{\omega \omega^n \mid \omega \in V^*, |\omega| \geq 2, n \geq 0\}$.

У п њ т в а н е: Използвайте Теорема 2.8.1.

2. Да се докаже, че езикът $L = \{\omega \omega' \mid \omega \in V^*\}$, където ω' е думата получена от ω , чрез записване на нейните букви в обратен ред, не е автоматен език.

3. Да се докаже, че следните езици са безкрайни:

а) $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega \text{ завършва с три последователни единици}\}$;

б) $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega \text{ има за поддума } 101\}$;

в) $L = \{\omega \in \{0, 1\}^+ \mid \omega \text{ не започва с две последователни единици}\}$.

4. Да се докаже, че езикът $\{a^n b^m \mid 1 \leq n \leq m\}$ не е автоматен.