

1.3 Двучленни релации (отношения)

Определение 1.3.1 Нека A и B са две множества и $W \subset A \times B$. Всяко подмножество W на $A \times B$ се нарича **двучленна релация (отношение, графика на релацията)** между A и B .

При това, ако $(a, b) \in W$ се казва, че релацията W се изпълнява между a и b или още, че a и b са в релация W . Самото включване $(a, b) \in W$, често се записва като aWb или $W(a, b)$.

Например $W = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$ е двучленна релация "по-малко" в множеството \mathbb{N} на естествените числа. Традиционното означение на тази релация е " $<$ " и е естествено да запишем " $3 < 5$ " вместо $(3, 5) \in W$.

Всяка двучленна релация W ни задава две множества, които са подмножества съответно на A и B по следния начин:

(i) *дефиниционно множество (област)*

$$D(W) = \{x \in A \mid \text{съществува } y \in B \text{ така, че } (x, y) \in W\};$$

(ii) *множество от стойности (кообласт)*

$$R(W) = \{y \in B \mid \text{съществува } x \in A \text{ така, че } (x, y) \in W\}.$$

Ако U и W са две релации между A и B то $U = W$ точно тогава, когато U и W се състоят от едни и същи наредени двойки.

Всяка двучленна релация W между множествата A и B определя еднозначно двучленната релация W^{-1} между B и A по следния начин:

$$W^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in W\}.$$

Тази релация се нарича *обратна* или *инверсия* на W .

От дефиницията на W^{-1} следва, че W е обратната на W^{-1} , т.е. $W = (W^{-1})^{-1}$.

В съвкупността от двучленните релации между две множества, могат да се въведат операции обединение, сечение и допълнение, както с множествата.

Да отбележим някои от по-важните свойства, които могат да притежават двучленни релации, определени в едно и също множество, т.е. релации, за които $A = B$:

1. *Рефлексивност (отразимост, W е рефлексивна)*. Казваме, че двучленната релация W , определена в множеството A е рефлексивна, ако за всяко $x \in A$ е в сила $(x, x) \in W$.
2. *Симетричност (W е симетрична)*. Двучленната релация W в A е симетрична, ако от $(x, y) \in W$ следва, че $(y, x) \in W$.
3. *Антисиметричност (W е антисиметрична)*. Релацията W в A е антисиметрична, ако от $(x, y) \in W$ и $(y, x) \in W$ следва, че $x \equiv y$.
(Тук знакът " \equiv " означава, че двата елемента x и y съвпадат).
4. *Транзитивност (преносимост, W е транзитивна)*. Релацията W в A е транзитивна, ако от $(x, y) \in W$ и $(y, z) \in W$ следва, че $(x, z) \in W$.

Ще спрем вниманието си на два специални вида релации – на еквивалентност и на наредба.

Определение 1.3.2 *Всяка двучленна релация в дадено множество A , притежаваща свойства 1, 2, и 4 се нарича **релация на еквивалентност** или само **еквивалентност в A** .*

Пример 1.3.1 Очевидно $W = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ се дели на } 3\}$ е двучленна релация в множеството \mathbb{Z} на целите числа. Тъй като 0 се дели на 3 следва, че $(x, x) \in W$, т.е. W е рефлексивна. От друга страна, ако $x - y$ се дели на 3, то $y - x$ също се дели на 3, т.е. W е симетрична. Накрая, ако $x - y$ и $y - z$ се делят на 3, то и $x - z$ също се дели на 3, т.е. W е транзитивна. Следователно W е релация на еквивалентност в \mathbb{Z} .

Ако положим $a \equiv b$ вместо $(a, b) \in W$, можем да запишем следните релации:

$$\dots - 6 \equiv -3 \equiv 0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv \dots$$

$$\dots - 5 \equiv -2 \equiv 1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv \dots$$

$$\dots - 4 \equiv -1 \equiv 2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv \dots$$

Очевидно всяко цяло число попада в някои от тези три реда и никое число не се среща в два различни реда. Оказва се, че аналогично разбиване на произволно множество A , може да се получи от всяка еквивалентност в A .

Нека W е еквивалентност в множеството A и за всяко $a \in A$ да положим:

$$K_a = \{x \in A \mid (a, x) \in W\}.$$

Определение 1.3.3 Множеството K_a ще наричаме **клас на еквивалентност** при W , съдържащ елемента $a \in A$. Това, че $a \in K_a$ следва от факта, че W е рефлексивна релация.

Ако M е множество, то ще казваме, че подмножествата M_1, M_2, \dots образуват *разбиване* на M , ако $M_1 \cup M_2 \cup \dots = M$ и $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Теорема 1.3.1 Нека W е еквивалентност в множеството A . Съкупността от всички класове на еквивалентност при W образуват разбиване на A .

Доказателство: Поради това, че за всяко $a \in A$ е в сила $a \in K_a$ следва, че

$$\bigcup_{a \in A} K_a \subset A.$$

Остава да докажем, че за всеки два елемента a и b от A , ако $K_a \cap K_b \neq \emptyset$, то $K_a = K_b$.

Наистина, нека $K_a \cap K_b \neq \emptyset$. Да изберем произволно $x \in K_a$. Следователно $(a, x) \in W$. От $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ следва, че съществува $c \in K_a \cap K_b$. Следователно $(a, c) \in W$ и $(b, c) \in W$. Поради симетричността на W имаме $(x, a) \in W$ и $(c, b) \in W$. От транзитивността на W получаваме $(x, c) \in W$. Като вземем предвид, че $(c, b) \in W$ следва, че $(x, b) \in W$ и от симетричността на W получаваме $(b, x) \in W$ или $x \in K_b$. Следователно $K_a \subset K_b$. Аналогично се доказва, че $K_b \subset K_a$. Следователно $K_a = K_b$.

Лесно се съобразява, че $K_a = K_b$ точно тогава, когато $(a, b) \in W$. \square

Вярна е и следната теорема, която в известен смисъл е обратна на предишната.

Теорема 1.3.2 *Нека A е множество и A_1, A_2, \dots е разбиване на A . Тогава съществува релация на еквивалентност W в A , на която A_1, A_2, \dots са класове на еквивалентност.*

Доказателството на тази теорема се получава, като се разгледа релацията

$$W = \{(x, y) \in A \times A \mid \text{съществува } i \text{ така, че } x \in A_i \text{ и } y \in A_i\}$$

и се докаже, че W е еквивалентност, за която A_1, A_2, \dots са класове на еквивалентност. \square

Определение 1.3.4 *Двучленна релация в дадено множество A , която притежава свойствата 1, 3 и 4 се нарича **релация на наредба (подреждане)** в A или само **наредба** в A .*

Пример 1.3.2 Очевидно $W = \{(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid x \text{ дели } y\}$ е двучленна релация в множеството \mathbb{N}^+ на целите положителни числа. Тъй като всяко число дели себе си следва, че W е рефлексивна. Също така в множеството \mathbb{N}^+ , ако x дели y и y дели x , то $x = y$. Следователно W е антисиметрична. По нататък, ако x дели y и y дели z , то x ще дели z и следователно W е транзитивна, т.е. W е наредба в \mathbb{N}^+ .

Ще казваме, че една наредба W в множеството A е *линейна (пълна)*, ако за всеки два елемента $a, b \in A$ е в сила $(a, b) \in W$ или $(b, a) \in W$.

Наредбата от предишния пример, очевидно не е линейна, тъй като, например $(5, 7) \notin W$.

От друга страна, наредбата

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid x \leq y\}$$

в \mathbb{N}^+ е линейна, тъй като за всеки две естествени числа a и b е вярно, че $a \leq b$ или $b \leq a$.

Оказва се, че понятието двучленна релация е твърде общо и чрез него могат да се дефинират такива фундаментални понятия за цялата математика като функция, изображение, операция и др.

З а д а ч и

1. Да се намери обратната на релацията W , ако:
 - а) W е релацията "по-малко" в множеството на целите числа;
 - б) W е релация в множеството $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, която има графика $G = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2)\}$.
2. Да се намери обединението, сечението и разликата на двете релации, определени в предишната задача.
3. Съществува ли релация, която едновременно е:
 - а) симетрична и антисиметрична;
 - б) рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
4. Кой от следните релации са еквивалентности и кои наредби?
 - а) $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x \leq y + 1\}$;
 - б) $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^2 = y^4\}$;
 - в) $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid |x| = |y|\}$;
 - г) $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid (x \text{ и } y \text{ четни и } x \leq y) \text{ или } (x \text{ е четно, а } y \text{ нечетно})\}$;
 - д) $\{(X, Y) \in P(\mathbf{Z}) \times P(\mathbf{Z}) \mid X \cap Y = \emptyset\}$.