

## 1.6 Основни сведения от комбинаториката

Ще разгледаме най-често срещаните методи за решаване на някои задачи за изброяване или оценяване броя на елементите от дадено множество или множества.

Една такава задача е задачата за намиране на броя на всевъзможните начини за избиране на  $k$  елемента от дадено множество в което има  $n$  елемента при определени изисквания за избирането на всеки елемент (с повторение или без повторение, например).

Разполагането или избирането на определен брой елементи от дадено множество, зависи от това дали се интересуваме от последователността (наредбата) на избраните елементи или не. В първия случай, говорим за *размествания* (*вариации*) на  $k$  елемента, а когато не държим сметка как са подредени тези елементи – за *счестания* (*комбинации*) от  $k$  елемента.

Така, ако вземем за изходно множество  $A = \{a, b, c\}$ , то вариациите от два елемента без повторение ще са :  $ab, ac, ba, bc, ca, cb$ , а комбинациите от 2 елемента без повторение ще са:  $ab, ac, bc$ .

Да означим с  $P_r^n$  броя на вариациите на  $r$  елемента без повторение измежду  $n$  елемента. Ще покажем, че

$$P_r^n = n(n-1)\dots(n-r+1) \text{ при } n \geq r \geq 1.$$

Тъй като повторения на елементи не се допускат следва, че  $n \geq r$ . При  $r = 0$  да приемем, че имаме само една вариация (нито един елемент не се избира), т. е. полагаме  $P_0^n = 1$ .

Всяка вариация на  $r$  елемента без повторение измежду  $n$  елемента, може да се разглежда като запълване на  $r$  позиции с елементи от  $n$ -елементното множество. За първата позиция разполагаме с  $n$ -възможности, а след като сме избрали елемент за нея, имаме  $n-1$  възможности за втората позиция и т.н. След като сме избрали  $r-1$  елемента ни остават  $n-(r-1) = n-r+1$  възможности за  $r$ -тата позиция. Следователно

$$P_r^n = n.(n-1)\dots(n-r+1).$$

В частност, когато  $r = n$ , вариациите се наричат *пермутации* на  $n$ -елемента и

$$P_n^n = n.(n-1)...2.1 = n!$$

Със  $C_r^n$  да означим броя на всички съчетания (комбинации) на  $r$  елемента без повторение измежду  $n$  елемента. Като вземем в предвид, че на всяко съчетание елементите могат да се подредят по  $r!$  начина следва, че

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Често числата  $C_r^n$  се бележат с  $\binom{n}{r}$  и се наричат биномни коефициенти.

От определението на  $\binom{n}{r}$  следва непосредствено

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad 0 \leq r \leq n.$$

Също така без сериозни затруднения се установява, че

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

**Пример 1.6.1** Да разгледаме бинома

$$(x+y)^n = (x+y)...(x+y)(x+y)$$

и да забележим, че произведението  $x^r y^{n-r}$  в дясната страна, може да се получи, като вземем  $x$  от  $r$  множители  $x+y$ , които се избират по произволен начин. Следователно броят на събираемите, които съдържат  $x^r$  ще бъде  $\binom{n}{r}$ . Ясно е, че  $y$  ще се вземе от останалите  $n-r$  множители, от които  $x$  не е избран. Следователно

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

При  $x = y = 1$  получаваме  $2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$ , а при  $x = -1$  и  $y = 1$  получаваме  $0 = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r}$ .  $\square$

**Пример 1.6.2** Да се намери броят на различните начини за разполагане на  $n$  различни предмета в кръг.

Да разгледаме едно произволно разполагане  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$  на  $n$  елемента върху кръга. Очевидно изписването им може да започва не само от  $a_{i_1}$ , а от всеки друг елемент без да се измени разположението, върху кръга. Например, същото разполагане може да се запише и като  $a_{i_3} a_{i_4} \dots a_{i_n} a_{i_1} a_{i_2}$  и т.н. Ясно е, че за всяко разполагане на  $n$  елемента върху кръг имаме  $n$  различни записвания, а от друга страна, всяко записване определя по една пермутация на тези  $n$  елемента. Следователно броят на разполаганията в кръг е  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ .

Общият брой на вариациите от  $r$  елемента с повторение измежду  $n$  елемента е  $n^r$ ,  $r \geq 0$ .

Наистина, при  $r = 0$  имаме само една възможност за избор – да не изберем нито един елемент, т.е.  $n^0 = 1$ . При  $r > 0$ , начините за попълване на всяка една позиция от вариацията са  $n$  на брой, което доказва, че общият брой на такива вариации е точно  $n^r$ .

**Пример 1.6.3** Символите, които се използват при предаване и обработване на информацията са буквите от азбуката на някои говорим език (най-често английски), цифрите и някои специални символи. Всичките тези символи обикновено се кодират, чрез думи над азбука с две букви 0 и 1, като дължината на тези нови кодови думи е отнапред определена. Най-често тази дължина е 8 двоични символи (8 бита), които образуват един байт. Да се определи колко са различните символи, които могат да се кодират с двоични думи с дължина 8 (т.е. с 1 байт).

Броят на символите съвпада с броя на вариациите на 8 елемента с повторение измежду елементите на множеството  $\{0, 1\}$ . Съгласно казаното по-горе следва, че този брой е  $2^8 = 256$ .

В комбинаториката особено важна роля играе една забележителна функция в множеството на целите числа, известна като функция на Мьобиус.

**Определение 1.6.1** Нека  $n$  е цяло положително число и  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  е неговото канонично разлагане на прости множители. **Функцията на Мьобиус**  $\mu(n)$  се дефинира по следния начин

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{ако } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1; \\ 0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

**Пример 1.6.4** Да се получат стойностите на  $\mu(n)$  за  $n \leq 10$ . Без особени затруднения може да се състави следната таблица

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Ако  $a$  и  $b$  са цели числа и  $a$  е делител на  $b$ , то ще използваме означението  $a|b$ .

**Теорема 1.6.1**

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0, \text{ при } n > 1.$$

Сумата в лявата страна е по всички положителни делители на  $n$ .

**Доказателство:** Нека  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  и да положим  $n_1 = p_1 p_2 \dots p_k$ . Да отбележим, че всеки делител  $d$  на  $n$  има вида

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, k.$$

Измежду всички делители на  $n$ , да разгледаме произволен делител  $d$ , който не е делител на  $n_1$ . Следователно съществува  $\beta_i$ , за което  $\beta_i \geq 2$  и от определението на  $\mu$  получаваме  $\mu(d) = 0$ . Ето защо

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n_1} \mu(d).$$

Тъй като всевъзможните делители на  $n_1$  са произведения от  $r$  ( $0 \leq r \leq k$ ) прости числа, взети измежду  $k$  прости числа  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , то броят на делителите на  $n_1$ , които са произведения от  $r$  прости числа, са колкото е броят на комбинациите на  $r$  елемента без повторение измежду  $k$  елемента, т.е.  $\binom{k}{r}$ .

Стойността на функцията на Мьобиус за всеки такъв делител е  $(-1)^r$  и съгласно Пример 1.6.1, получаваме

$$\sum_{d|n_1} \mu(d) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} = 0. \quad \square$$

**Теорема 1.6.2 (Мьобиус).** *Нека  $f(n)$  и  $g(n)$  са функции, определени за всички естествени числа, чиито стойности са също естествени числа. Ако за всяко естествено  $n$*

$$(1) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

*то*

$$(2) \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right)$$

*и обратното, от (2) следва (1).*

**Доказателство:** Нека  $n$  е произволно естествено число. Понеже (1) е в сила за всяко естествено, то ще е в сила и за всяко  $\frac{n}{d}$ , където  $d$  е произволен делител на  $n$ , т.е.

$$f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1).$$

Следователно дясната страна на (2) има вида

$$\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1).$$

От друга страна  $n$  допуска следното преставяне  $n = d \cdot d_1 \cdot n_1$ , като при фиксирано  $d_1$ , множителят  $d$  ще приема стойностите на всички делители на числото  $\frac{n}{d_1}$ . Това показва, че в последното равенство можем да изменим реда на сумирането, по следния начин:

$$(3) \quad \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1) = \sum_{d_1|n} g(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d).$$

От Теорема 1.6.1 следва, че  $\sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) = 0$  при  $\frac{n}{d_1} > 1$ . Следователно дясната страна на (3) се състои от единствено събираемо при  $\frac{n}{d_1} = 1$  и неговата стойност е  $g(n)$ , т.е.

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

За да докажем, че от (2) следва (1) полагаме  $d = d_1 l$  и получаваме

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} \sum_{d_1|d} \mu(d_1) f\left(\frac{d}{d_1}\right) = \sum_{l|n} f(l) \sum_{d_1|\frac{n}{l}} \mu(d_1) = f(n),$$

което доказва теоремата.  $\square$

Да се върнем към задачата за "кръговите пермутации" от Пример 1.6.2, като допуснем и повторение. Ще формулираме малко по-обща задача: Да се намери броят  $t(r)$  на разполаганията в кръг на  $r$  елемента с повторение измежду  $n$  на брой елемента.

Да предположим, че  $a_1 a_2 \dots a_r$  е едно кръгово разполагане, като след  $a_r$  следва  $a_1$ . От това разполагане, можем да получим еднозначно следните пермутации върху правата

$$(4) \quad a_1 a_2 \dots a_r, \quad a_2 a_3 \dots a_r a_1, \quad \dots, \quad a_r a_1 a_2 \dots a_{r-1}.$$

В общия случай, поради възможността от повторение, може да се случи тези  $r$  пермутации да не са различни по между си. За всяко кръгово разполагане  $a_1a_2\dots a_r$  може да се определи минимално число  $d$  такова, че пермутацията  $a_1a_2\dots a_r$  върху правата може да се получи, след като  $\frac{r}{d}$  пъти напишем  $a_1a_2\dots a_d$ , и това число да наречем *период на разполагането*. Например разполаганията 01010101 и 01100110 имат периоди съответно 2 и 4.

Ясно е, че в (4) ще има точно  $d$  различни пермутации върху правата. Да означим с  $m(d)$  броя на кръговите разполагания с дължина  $d$ , които имат период също равен на  $d$ . Тогава броят на различните пермутации върху правата, съответстващи на кръгови разполагания с дължина  $r$  и имащи период  $d$  е равен на  $d \cdot m(d)$ , докато броят на всички пермутации върху правата е  $n^r$ . Следователно

$$n^r = \sum_{d|r} d \cdot m(d).$$

Ако положим  $f(s) = n^s$  и  $g(s) = s \cdot m(s)$ , можем да приложим Теорема 1.6.2, от която получаваме

$$s \cdot m(s) = \sum_{d|s} \mu(d) \cdot n^{\frac{s}{d}}$$

или

$$m(s) = \frac{1}{s} \sum_{d|s} \mu(d) \cdot n^{\frac{s}{d}}.$$

Тъй като  $m(s)$  е броя на кръговите разполагания от  $s$  елемента с период  $s$ , то броят на всички разполагания от  $r$  елемента е

$$t(r) = \sum_{s|r} m(s) = \sum_{s|r} \frac{1}{s} \sum_{d|s} \mu(d) \cdot n^{\frac{s}{d}}.$$

Ще се спрем на още един метод, който намира широко приложение при решаване на някои комбинаторни задачи, известен като *принцип на включеното – изключеното*.

Нека  $A$  е множество от  $n$  елемента, а  $p(1), p(2), \dots, p(r)$  са свойства, които могат да се притежават от елементите на  $A$ . Предполагаме, че може да се определи еднозначно, дали даден елемент на  $A$  притежава или не свойството  $p(j)$  за  $j = 1, 2, \dots, r$ . Да означим с  $n_{i_1 \dots i_t}$  броя на елементите от  $A$ , които притежават свойствата  $p(i_1), \dots, p(i_t)$ , а с  $n(s)$  да означим броя на елементите в  $A$ , които притежават точно  $s$  от свойствата  $p(1), \dots, p(r)$ . С  $n(0)$  означаваме броя на елементите в  $A$ , които не притежават нито едно от посочените свойства.

Принципът на включеното – изключеното се състои в използването на следното равенство.

**Теорема 1.6.3 (Принцип на включеното – изключеното)**

$$(5) \quad n(0) = n - \sum_{i=1}^r n_i + \sum_{i_1 < i_2} n_{i_1 i_2} - \dots + (-1)^t \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_t} n_{i_1 i_2 \dots i_t} + \dots + (-1)^r n_{12 \dots r}.$$

**Доказателство:** Доказателството на това равенство ще извършим на два етапа.

Най-напред да предположим  $r = 2$ . Тогава равенството

$$n(0) = n - (n_1 + n_2) + n_{12}$$

е вярно, тъй като всеки елемент, който притежава едновременно свойствата  $p(1)$  и  $p(2)$  се брои и в  $n_1$  и в  $n_2$  и следователно в разликата  $n - (n_1 + n_2)$  тези елементи се изваждат два пъти. Ето защо е необходимо да се добави  $n_{12}$  към тази разлика и ще получим  $n(0)$ .

Нека сега да разгледаме общия случай  $r \geq 2$ . Ясно е, че елементите, които не притежават нито едно от свойствата  $p(1), \dots, p(r)$  се броят в дясната страна само в първото събираемо, тъй като

$$n(0) = n - \sum_{t=1}^r n(t),$$



където  $n(t)$  е броят на елементите, които притежават точно  $t$  свойства.

Да пресметнем коефициента пред  $n(t)$  в дясната страна на (5). Всеки елемент, който притежава точно  $t$  свойства попада (или се отчита) във всяка сума от вида  $\sum_{i_1 < \dots < i_l} n_{i_1 i_2 \dots i_l}$  при  $l \leq t$ .

Нещо повече, във всяка сума такъв елемент от  $A$  се брои толкова пъти, колкото  $l$ -орки от свойствата могат да се избераат измежду  $t$ -те свойства, които притежава дадения елемент, т.е.  $\binom{t}{l}$  пъти. Следователно коефициентът пред  $n(t)$  в (5) ще бъде

$$1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^l \binom{t}{l} + \dots + (-1)^t \binom{t}{t}.$$

Съгласно Пример 1.6.1 следва, че този коефициент е 0. Тъй като  $t$  е произволно число, за което  $1 \leq t \leq r$  следва, че дясната страна на (5) е точно  $n(0)$ .  $\square$

Равенството (5) допуска следното обобщение при  $t \leq r$

$$\begin{aligned} n(t) = & \sum_{i_1 < \dots < i_t} n_{i_1 \dots i_t} - \dots + \\ & + (-1)^{s-t} \binom{s}{t} \sum_{i_1 < \dots < i_s} n_{i_1 \dots i_s} + \dots + (-1)^{r-t} \binom{r}{t} n_{12 \dots r}. \end{aligned}$$

От многобройните приложения на принципа на включеното – изключеното, ще се спрем на едно, а именно определяне броя на пермутациите на  $r$  елемента, в които не се съдържат отнапред зададени вариации на  $s$  ( $s \leq r$ ) елемента без повторение измежду  $r$ -те елемента.

**Пример 1.6.5** Да се намери броят на пермутациите на числата  $1, 2, \dots, 7$ , които не съдържат вариациите 32 и 56.

Да означим с  $p(1)$  и  $p(2)$  свойствата на пермутациите да имат съответно вариациите 32 и 56.

Ако вариацията 32 влиза в пермутацията, тя може да заеме 6 възможни позиции. Същото се отнася и за 56. При всяка една от тези възможности остават 5 позиции за останалите числа от 1 до 7.

Следователно  $n_1 = 6 \cdot 5!$  и  $n_2 = 6 \cdot 5!$ .

Да разгледаме пермутациите, които съдържат и 32 и 56. Разполагаме с две възможности 32 да е пред 56 или 56 да е пред 32. При всяка една от тези възможности възникват десет варианта за разместването на останалите три числа – трите да са в началото; трите да са в средата; трите да са в края на пермутацията; едно да е в началото, едно в средата, едно в края; едно в началото две в средата; две в началото, едно в средата; две в началото, едно накрая; едно в средата, две накрая; две в средата, едно накрая; едно в началото, две накрая.

Следователно  $n_{12} = 2 \cdot 10 \cdot 3! = 120$ . Съгласно принципа на включеното – изключеното следва

$$\begin{aligned} n(0) &= n - (n_1 + n_2) + n_{12} = \\ &= 7! - 12 \cdot 5! + 20 \cdot 3! = 3!(840 - 240 + 20) = 3! \cdot 620 = 3720. \end{aligned}$$

### З а д а ч и

1. Да се докаже, че съществуват точно  $\binom{n+t-1}{n}$  решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + \dots + x_t = n$$

в множеството на неотрицателните цели числа.

2. По колко различни начина могат да се разположат  $n$  човека в кръг? Две разположения са еднакви, ако в тях всеки човек има едни и същи съседни (не е задължително да са от същите страни).

Отг.  $\frac{1}{2}(n-1)!$ .

3. Колко пермутации на първите  $n$ ,  $n \geq 2$  числа не започват с числото 2?

Отг.  $(n-1)!(n-1)$ .

4. Да се докаже, че:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{i} = \binom{k+n+1}{n};$$

$$\text{в) } \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

5. Да се намери броят на комбинациите от  $l$  елемента без повторение измежду първите  $n$  числа, в които има поне една двойка последователни числа.

$$\text{Отг. } \binom{n}{l} - \binom{n-l+1}{l}.$$

6. Нека  $\psi(n)$  е броя на всички положителни делители на естественото число  $n$ . Да се докаже, че

$$\sum_{d|n} \mu(d) \psi\left(\frac{n}{d}\right) = 1.$$

**У п ъ т в а н е:** Използвайте равенството  $\psi(n) = \sum_{d|n} 1$ .

7. Да се намери броят  $D(n)$  на всички пермутации  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  на числата  $1, 2, \dots, n$ , за които  $i_t \neq t$ , при  $t = 1, 2, \dots, n$ .

**У п ъ т в а н е:** Покажете, че броят на пермутациите, които съдържат точно  $r$  числа  $j_1, j_2, \dots, j_r$ , за които  $j_t = t$ ,  $t = 1, 2, \dots, r$  е равен на  $\frac{n!}{r!}$ . От принципа на включеното – изключеното следва, че

$$\begin{aligned} D(n) &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + \\ &+ (-1)^r \frac{n!}{r!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}. \end{aligned}$$

Като вземем предвид, че  $\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$  е сумата от първите  $n+1$  членове от Тейлоровия ред при разлагането на функцията  $f(x) = e^x$

за  $x = -1$ , където  $e^{-1} = 0,36806\dots$ , и следователно при нарастването на  $n$ ,  $D(n)$  се "доближава" към  $n!e^{-1}$ .

8. Да се докаже, че функцията на Мьобиус е мултипликативна, т.е.  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ , за всеки две взаимно прости числа  $m$  и  $n$ .