

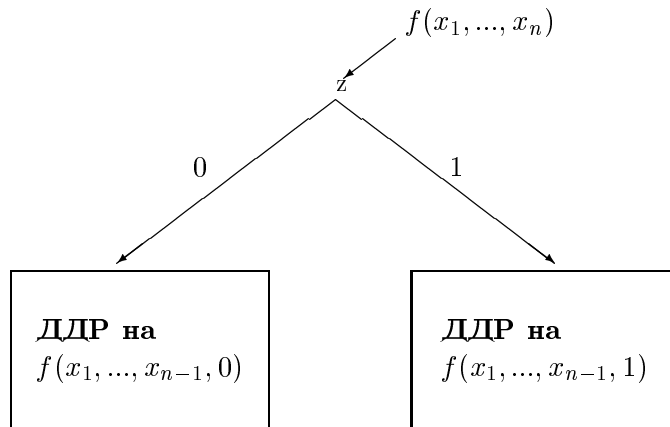
4.10 Диаграми за двоично решаване

Таблиците и формулите не са единствения начин за представяне на двоични функции. В този параграф ще се запознаем с *Диаграмите за Двоично Решаване* (ДДР), които в последно време се налагат като удобно икономично средство за представяне на двоична функция.

ДДР представлява ациклически ориентиран граф, където всички стрелки са маркирани с 0 или 1. В ДДР има един *начален* връх, в който не влизат стрелки. *Крайните* върхове (т.е. върховете, от които не излизат стрелки) са най-много два. Последните са маркирани с константите 0 и 1. Ние ще маркираме за удобство и останалите върхове с двоични функции, но това не е задължително и в реалните ДДР не се прави. В основата на конструкцията на ДДР за дадена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е следното твърждение:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \bar{x}_n f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \vee x_n f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1),$$

което свежда функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ на n променливи към 2-те функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$ на $n-1$ променливи. Тогава ДДР на $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ може да се построи по следния начин



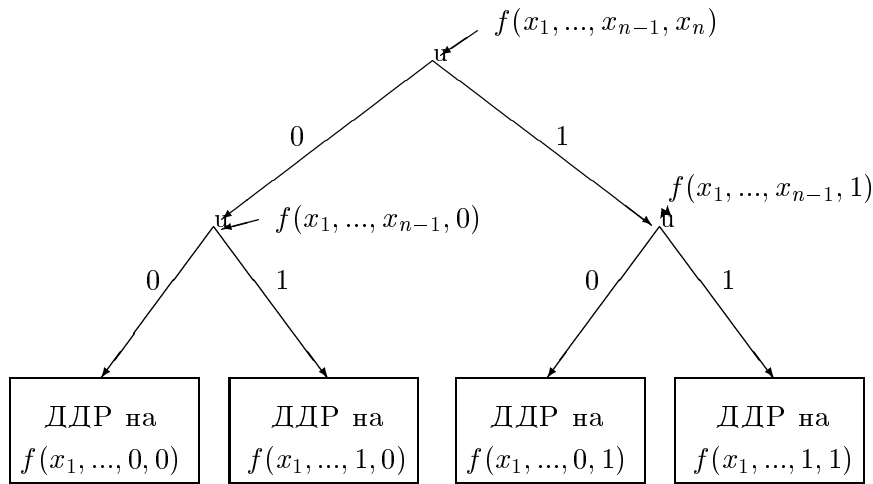
Фиг. 4.10.1

Левият клон на диаграмата, означен с 0, води до все още неизвестната ДДР на $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, а десният, означен с 1 – до неизвестната ДДР на $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$.

Процесът продължава с разлагането на $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ по x_{n-1} :

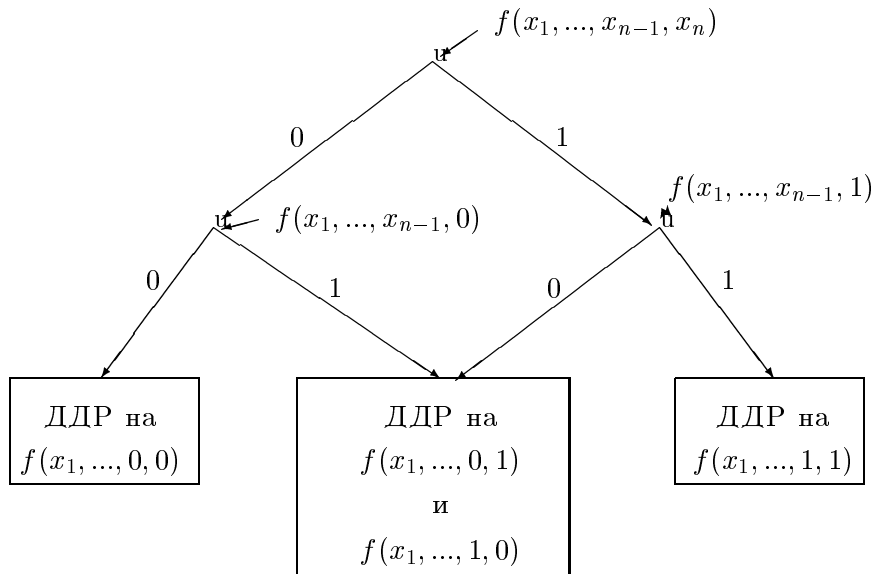
$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \bar{x}_{n-1}f(x_1, x_2, \dots, 0, 0) \vee x_{n-1}f(x_1, x_2, \dots, 1, 0),$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) = \bar{x}_{n-1}f(x_1, x_2, \dots, 0, 1) \vee x_{n-1}f(x_1, x_2, \dots, 1, 1).$$



Фиг. 4.10.2

При това, ако например $f(x_1, \dots, 0, 1) = f(x_1, \dots, 1, 0)$ не е необходимо да се строят две идентични ДДР за двете функции



Фиг. 4.10.3

Продължаваме построяването на ДНР на четирите функции $f(x_1, \dots, 0, 0)$, $f(x_1, \dots, 0, 1)$ и $f(x_1, \dots, 1, 1)$ с тяхното разлагане по x_{n-2} и т.н. Тъй като след всяко разлагане броят на променливите се намалява с 1, то в крайна сметка ще стигнем до необходимостта да построим ДНР на 2-те функции на 0 променливи – т.е. на константите 0 и 1. По дефиниция техните ДНР се състоят само от по един задължително *маркиран връх*:



Фиг. 4.10.4

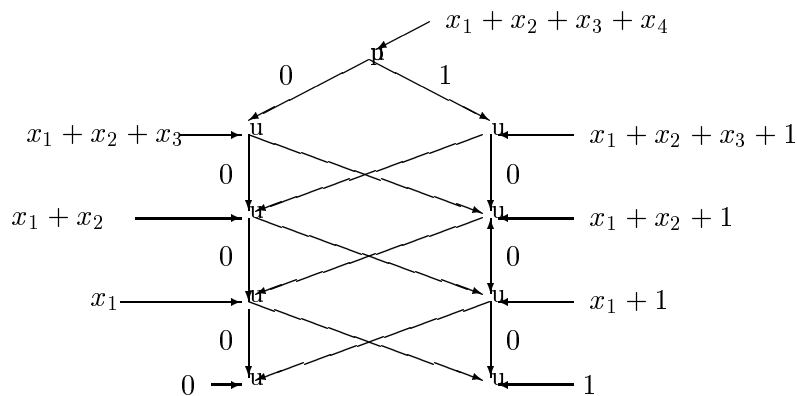
това са крайните върхове на диаграмата.

След като е построена цялата ДНР за $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, то ние сме вече в състояние да изчисляваме f върху произволна n -торка $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle$. Започваме движение по диаграмата

на f отгоре надолу. Ако $a_n = 0$, ще тръгнем по стрелката, означена с 0. В противен случай ще преминем по другата стрелка, стрелката означена с 1. Аналогично, чрез стойността на a_{n-1} избираме посоката на следващата стрелка и т. н. Движението продължава, докато се стигне до краен връх, маркиран с 0 или 1. Това е именно стойността на f върху $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle$. Лесно се вижда, че изчисляването на f е свързано с извършването на n сравнения.

Пример 4.10.1 Да построим ДДР за функцията $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. (виж. фиг.4.10.5)

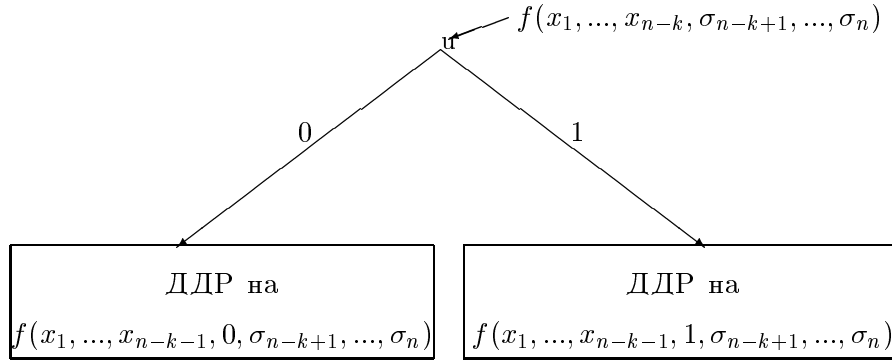
Сега можем да опишем изграждането на ДДР за $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по формално. Ще наричаме $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}, \sigma_{n-k+1}, \dots, \sigma_n)$ *подфункция* на f , ако тя се получава от f чрез заместване на последните k променливи с константи, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Да означим с B_k^f множеството от всички различни подфункции на f , които се получават от f със заместването на последните k променливи. Очевидно, $B_0^f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. ДДР на f ще построим, чрез последователното строяване на ДДР на функциите от $B_n^f, B_{n-1}^f, \dots, B_1^f, B_0^f$. На B_n^f принадлежат само константите 0 и 1 и техните ДДР са вече известни.



Фиг. 4.10.5

Да предположим, че сме построили ДДР за всички функции от

B_{k+1}^f и $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}, \sigma_{n-k+1}, \dots, \sigma_n)$ е произволна функция от B_k^f . Тогава ДДР за нея изглежда така



Фиг. 4.10.6

Двете функции $f(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0, \sigma_{n-k+1}, \dots, \sigma_n)$ и $f(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 1, \sigma_{n-k+1}, \dots, \sigma_n)$ са от B_{k+1}^f и за тях по предположение има вече построени ДДР. Следователно, горната конструкция дава завършена ДДР за $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}, \sigma_{n-k+1}, \dots, \sigma_n)$. Да забележим, че за ДДР на всяка функция от B_k^f ни е необходим един връх. Тогава като имаме ДДР на функциите от B_{k+1}^f , то за построяването на ДДР за всички функции от B_k^f ни трябва общо $|B_k^f|$ върха.

Нека под *сложност* на ДДР да разбираме броят на нейните върхове. Да разгледаме произволна диаграма D_f на някоя функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на n променливи. Да означим с L_D нейната сложност. От конструкцията на D_f веднага следва:

$$L_D = \sum_{i=0}^n |B_i^f|.$$

От друга страна мощността $|B_i^f|$ на множеството B_i^f е не по-голяма от 2^i (по толкова начина можем да заменим i променливи с константи) и от $2^{2^{n-i}}$ (толкова са функциите на $n-i$

променливи). Следователно,

$$L_D \leq \sum_{i=0}^n \min(2^i, 2^{2^{n-i}}).$$

Да положим $m = n - \lfloor \log_2 n \rfloor$. Както вече правихме, с $\lfloor x \rfloor$ обозначаваме цялата част на x . Ще имаме

$$L_D \leq \sum_{i=0}^m 2^i + \sum_{i=m+1}^n 2^{2^{n-i}} \leq 2^{m+1} + 2^{2^{n-(m+1)+1}} \leq$$

$$2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1} + 2^{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor-1}+1} \leq 4 \frac{2^n}{n} + 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 4 \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{n}{2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}}\right),$$

което за достатъчно големи n е близко до $4 \frac{2^n}{n}$ защото $\frac{n}{2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}}$ клони бързо към 0. Получихме, че произволна ДДР на функция от n променливи има не повече от

$$4 \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{n}{2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}}\right) \approx 4 \frac{2^n}{n}$$

върха.

ДДР се реализират лесно по програмен път. На всеки от върховете (без крайните) се съпоставя конструкция от вида

$$\text{if } x_i = 0 \text{ then goto } D0 \text{ else goto } D1;$$

а на крайните върхове – от вида

$$F := 0;$$

или

$$F := 1;$$

З а д а ч и

1. Постройте ДДР за функцията

$$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4.$$

2. Определете сложността на ДДР на функцията $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

3. Реализирайте ДДР от Примера в този параграф като програма.