

4.4 Затворени класове

В предишния параграф доказахме едно полезно необходимо и достатъчно условие за пълнота. С негова помощ беше установена пълнотата на няколко различни множества от двоични функции. За съжаление това условие не дава алгоритъм, с помощта на който след краен брой добре дефинирани стъпки да можем да установим пълнотата или непълнотата на произволно крайно множество от функции F .

В този и в следващите четири параграфа ще опишем и обосновем един алгоритъм за разпознаване на пълнотата или непълнотата на произволно крайно множество от двоични функции.

Определение 4.4.1 *Ще наричаме множество C затворено или затворен клас, ако $C = [C]$.*

Пример 4.4.1 Множествата P_2 и $\{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_3, \dots\}$ са затворени.

Следната лема дава възможност да се установява лесно затвореността на дадено множество.

Лема 4.4.1 *Нека C е множество от функции, за което се изпълняват условията:*

- а) всички тавтологични функции принадлежат на C ;*
- б) суперпозиция на функции от C също принадлежи на C .*

Тогава C е затворено.

Доказателство: Да предположим, че лемата не е вярна. Тогава има формула $F_1 = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ над C , която не реализира функция от C . Ще покажем, че F_1 има подформула φ_k , която не реализира функция на C .

Лесно се вижда, че ако всички подформули φ_k на F_1 реализират функции от C , то самата F_1 също реализира функция от C . Действително, нека

$$F_1 = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

където $f \in C$, а φ_i са формули над C , реализиращи функции от C , или букви на променливи x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Ако φ_i е буква на променлива, то тя е твърждествена функция и по условие а) също принадлежи на C . Получихме, че F_1 реализира функцията

$$f(g_1, g_2, \dots, g_n),$$

където $g_i \in C$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогава $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ е суперпозиция над C и по условие б) принадлежи на C .

Да положим $F_2 = \varphi_k$. Тъй като F_2 не реализира функция от C , тя също има подформула F_3 , която не реализира функция от C . Същото може да се каже за F_3 . В крайна сметка получаваме една безкрайна редица от формули, които не реализират функции от C ,

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \dots,$$

където всяка формула F_i е подформула на предишната F_{i-1} . Съществуването на такава редица не е възможно поради крайната дължина на F_1 . \square

Определение 4.4.2 Ще казваме, че двоичната функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **запазва нулата**, ако $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Множеството от всички функции, запазващи нулата, ще означим с T_0 . Ако $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_0$, то стойността на функцията f е фиксирана върху нулевата n -орка, а върху останалите $2^n - 1$ n -орки f може да приема произволни стойности. Следователно, броят на функциите от n променливи от T_0 е $2^{2^n - 1}$.

Определение 4.4.3 Ще казваме, че двоичната функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **запазва единицата**, ако $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Множеството от всички двоични функции, запазващи единицата, ще означим с T_1 . Очевидно, броят на функциите от n променливи от T_1 е също $2^{2^n - 1}$.

Теорема 4.4.1 Множествата T_0 и T_1 са затворени класове.

Доказателство: Теоремата ще докажем само за T_0 . Доказателството за T_1 е аналогично и няма да го повтаряме. Имаме

а) твърждествените функции x_1, x_2, x_3, \dots запазват нулата и следователно са от T_0 ;

б) ако f, g_1, g_2, \dots, g_n са от T_0 , то тяхната суперпозиция $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ също принадлежи на T_0 .

Наистина

$$f(g_1(0, \dots, 0), g_2(0, \dots, 0), \dots, g_n(0, \dots, 0)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Верността на теоремата следва от Лема 4.4.1.

Теорема 4.4.2 Нека $f_0 \notin T_0$ и $f_1 \notin T_1$. Тогава с формули над $\{f_0, f_1\}$ можем да построим или константите 0 и 1 или отрицанието \bar{x} , т. е. $\{0, 1\} \subset \{f_0, f_1\}$ или $\{\bar{x}\} \subset \{f_0, f_1\}$.

Доказателство: Да положим

$$g_0(x_1) = f_0(x_1, x_1, \dots, x_1) \text{ и } g_1(x_1) = f_1(x_1, x_1, \dots, x_1).$$

Очевидно

$$g_0(0) = f_0(0, 0, \dots, 0) = 1 \text{ и } g_1(1) = f_1(1, 1, \dots, 1) = 0.$$

Нека $g_0(1) = a$ и $g_1(0) = b$. Имаме четири случая за a и b :

1. $a = 0, b = 0$. Тогава $g_0 = \bar{x}_1, g_1 = 0$.
2. $a = 0, b = 1$. Тогава $g_0 = \bar{x}_1, g_1 = \bar{x}_1$.
3. $a = 1, b = 0$. Тогава $g_0 = 1, g_1 = 0$.
4. $a = 1, b = 1$. Тогава $g_0 = 1, g_1 = \bar{x}_1$.

В случая 2 получихме отрицанието, в случая 3 - константите, в случаите 1 и 4 - отрицанието и константите. \square