

#### 4.9 Минимизация на двоични функции. Дизюнктивни нормални форми

В този и следващия параграф ще разглеждаме само формули над  $\{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ . Всяка функция от  $P_2$  се реализира с безбройно много формули над  $\{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ .

**Пример 4.9.1** Ако формулата  $F$  реализира  $f$ , то формулите

$$F \vee x_1\bar{x}_1, F \vee x_1\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_2, F \vee x_1\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_3, \dots$$

също реализират  $f$ .

**Определение 4.9.1** *Под сложност на формула ще разбираме броя на буквите на променливите в нея.*

**Пример 4.9.2** Формулата  $\bar{x}_1(x_1 \vee x_2 \vee x_2x_3)$  има сложност 5, а  $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$  — сложност 4.

От безбройно многото формули, които реализират дадена двоична функция  $f$ , практически интерес представляват тези с минимална сложност.

Очевидно за всяка двоична функция  $f$  може да се намери поне една минимална формула, защото сложностите на формулите, реализиращи  $f$ , представляват множество от естествени числа, сред които има поне едно най-малко.

Може да се опише един прост алгоритъм, с помощта на който се определя минималната формула за произволна  $f$ . Алгоритъмът се базира на факта, че за всяко фиксирано  $n$  съществува крайно множество  $S(n, M)$  от формули, които реализират функции на  $n$  променливи със сложност  $M$  и освен това формулите с  $M$  букви за всяка  $f \in S(n, M)$  могат да се построят алгоритмично.

Тогава алгоритъмът за намиране на минималната формула на произволна функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $n$  променливи има следния вид:

1.  $l = 1$ .
2. Проверяваме дали  $f$  принадлежи на  $S(n, l)$  и ако принадлежи, преминаваме към т. 5.

3.  $l = l + 1$ .
4. Преминваме към т. 2.
5. Определяме формулата със сложност  $l$ , която реализира  $f$ .
6. Край.

Описаният алгоритъм се основава на пълно изчерпване и е изключително трудоемък. Проверките от т. 2 не могат да се извършат и с най-големите компютри даже и за малки стойности на  $n$  и  $l$ . По тази причина той не е подходящ за практическо намиране на минимална формула.

Съществуват достатъчно убедителни резултати, които ни карат да предполагаме с голяма увереност, че всеки алгоритъм за намиране на минималната формула на произволна двоична функция има трудоемкост, сравнима с тази на метода на пълното изчерпване. Следователно, за да се намери практическо решение на задачата за минимизиране, тя трябва да се отслаби. Това може да стане по няколко начина. Например можем да се откажем от минималността и за произволна функция на  $n$  променливи да търсим формула, не по-сложна от минималната формула на най-лошата функция на  $n$  променливи. В този и в следващия параграф ще разгледаме един друг начин за отслабване на задачата за минимизация. Това ще постигнем, като ограничим класа на разглежданите формули и търсим минимална формула спрямо този клас.

**Определение 4.9.2** Израз от вида  $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ , където буквите на променливите са различни, както и константата 1, ще наричаме **елементарна конюнкция**.

**Определение 4.9.3** Дизюнкция на различни елементарни конюнкции ще наричаме **дизюнктивна нормална форма (ДНФ)**.

Минималната ДНФ (МДНФ) на функцията  $f$  е дизюнктивна нормална форма на  $f$  с минимална сложност върху класа от всички ДНФ.

Преди да разгледаме методите за намиране на МДНФ, да се запознаем с някои свойства на елементарните конюнкции и на самите ДНФ.

Да означим с  $N_f$  множеството от всички двоични  $n$ -орки, за които функцията  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  приема единична стойност. Да отбележим следните прости, но важни свойства:

$$\text{а) } N_{f \vee g} = N_f \cup N_g; \quad \text{б) } N_{fg} = N_f \cap N_g; \quad \text{в) } N_f = B^n \setminus N_{\bar{f}}.$$

Нека  $K_1$  и  $K_2$  са елементарни конюнкции. Тогава съществува прост метод, с който да определим дали  $N_{K_1} \subseteq N_{K_2}$ .

**Теорема 4.9.1** *Необходимото и достатъчно условие, за да е изпълнено  $N_{K_1} \subseteq N_{K_2}$ , е всички букви на  $K_2$  да се срещат в  $K_1$ , и то със същите степени.*

**Доказателство:** *Достатъчност.* Ако условието е изпълнено, то  $K_1 = K_2 K'_2$ , а оттам  $N_{K_1} = N_{K_2} N_{K'_2} = N_{K_2} \cap N_{K'_2} \subseteq N_{K_2}$ .

*Необходимост.* Нека  $N_{K_1} \subseteq N_{K_2}$ ,  $K_1 = x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots x_{i_k}^{a_k}$ ,  $K_2 = x_{j_1}^{b_1} x_{j_2}^{b_2} \dots x_{j_l}^{b_l}$ . Лесно се вижда, че в  $K_1$  и  $K_2$  не може да има една и съща буква на променлива с различни степени, защото тогава  $K_1 K_2 = 0$  и  $N_{K_1} \cap N_{K_2} = \emptyset$ . Да допуснем, че в  $K_2$  има букви на променлива, която не се среща в  $K_1$ , и нека тази буква е  $x_{j_1}$  със степен  $b_1$ . Да положим

$$x_{j_1} = \bar{b}_1, x_{i_1} = a_1, x_{i_2} = a_2, \dots, x_{i_k} = a_k.$$

Това можем да направим, защото  $x_{j_1}$  не е измежду  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ . Останалите променливи да заместим с константи по произволен начин. За така дефинираната  $n$ -орка  $K_2 = 0$  и  $K_1 = 1$ , което е невъзможно поради  $N_{K_1} \subseteq N_{K_2}$ .

**Пример 4.9.3** От горната теорема следва, че  $N_{x_1} \supseteq N_{x_1 \bar{x}_2}$ ,  $N_{x_1 \bar{x}_2} \supseteq N_{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}$ ,  $N_{x_1 \bar{x}_3} \supseteq N_{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}$  и т. н.

Ако  $N_{K_1} \subseteq N_{K_2}$ , ще казваме, че  $K_2$  поглъща  $K_1$ . Всички елементарни конюнкции, които поглъщат  $K_1$ , се получават от  $K_1$  чрез подходящо задраскване на букви на променливи.

**Пример 4.9.4** Всички елементарни конюнкции, които поглъщат  $x_1\bar{x}_2x_3$ , са  $x_1, \bar{x}_2, x_3, x_1\bar{x}_2, x_1x_3, \bar{x}_2x_3$ .

Нека  $K = x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2}\dots x_{i_l}^{a_l}$ . Тогава  $N_K$  се състои от  $n$ -орки, за които  $x_{i_1} = a_1, x_{i_2} = a_2, \dots, x_{i_l} = a_l$ , а останалите променливи могат да приемат произволни стойности. Тъй като това може да стане по  $2^{n-l}$  начина, то  $|N_K| = 2^{n-l}$ . Числото  $l$  се нарича *ранг* на елементарната конюнкция. Константната единица има ранг 0 и поглъща всички други елементарни конюнкции.

Да фиксираме броя на променливите равен на  $n$ . Елементарните конюнкции с  $n$  букви (т.е. от ранг  $n$ ) се наричат *пълни*. Дизюнктивната нормална форма, е съставена само от пълни конюнкции, се нарича *свършена ДНФ* (СвДНФ).

**Теорема 4.9.2** Всяка двоична функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  се реализира с точно една СвДНФ.

**Доказателство:** От доказателството на теоремата на Бул (теорема 4.3.1) се вижда, че всяка двоична функция се реализира поне с една СвДНФ. Лесно можем да установим, че броят на различните СвДНФ е  $2^{2^n} - 1$ , откъдето следва единствеността на представянето.  $\square$

**Определение 4.9.4** Ще наричаме елементарна конюнкция  $K$  **импликанта на двоичната функция  $f$** , ако  $N_K \subseteq N_f$ .

Нека  $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s$  е ДНФ на  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тогава всички членове на дизюнкцията  $K_1, K_2, \dots, K_s$  са импликанти на  $f$ , защото

$$N_{K_i} \subseteq N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s} = N_{K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s} = N_f.$$

**Определение 4.9.5** Ще казваме, че  $K$  е **проста импликанта на  $f$** , ако  $K$  е импликанта на  $f$  и не се поглъща от никоя друга импликанта на  $f$ .

Казано по друг начин,  $K$  е проста импликанта на  $f$ , ако е такава импликанта на  $f$ , която след произволно задраскване на буква на променлива престава да бъде импликанта на  $f$ .

**Пример 4.9.5** Лесно се вижда, че  $x_1x_2x_3$  е проста импликанта на  $x_1 + x_2 + x_3$ .

**Теорема 4.9.3** Минималната ДНФ на двоичната функция  $f$  се състои само от прости импликанти на  $f$ .

**Доказателство:** Да допуснем противното. Нека в МДНФ на  $f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s$  има импликанта, която не е проста. Нека това е  $K_1$ . Тогава съществува друга импликанта  $K'_1$  на  $f$ , която поглъща  $K_1$ , т.е.  $N_{K_1} \subseteq N_{K'_1}$ . Да разгледаме ДНФ  $K'_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s$ . Имаме  $N_{K'_1} \subseteq N_f, N_{K_2} \subseteq N_f, \dots, N_{K_s} \subseteq N_f$  и

$$N_f \supseteq N_{K'_1} \cup N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s} = N_{K'_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s}.$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} N_f &= N_{K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s} = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s} \subseteq N_{K'_1} \cup N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s} \\ &= N_{K'_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s}. \end{aligned}$$

Следователно  $f = K'_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s$ . С това получихме нова ДНФ на  $f$ , която съдържа по-малко букви от МДНФ.  $\square$

**Определение 4.9.6** Дизюнктивната нормална форма на  $f$ , която се състои от всички прости импликанти на  $f$ , се нарича **Съкратена ДНФ** (СДНФ на  $f$ ) на  $f$ .

**Теорема 4.9.4** Функцията  $f$  се реализира от своята СДНФ.

**Доказателство:** Тъй като  $K_1, K_2, \dots, K_s$  са импликанти (и то прости) на  $f$ , то

$$N_{K_i} \subseteq N_f \text{ и } N_{K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s} = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s} \subseteq N_f.$$

От друга страна, от теорема 4.9.3 следва

$$N_{\text{СДНФ}} \supseteq N_{\text{МДНФ}} = N_f. \quad \square$$

Алгоритмите за намиране на МДНФ обикновено се състоят от две части – построяване на СДНФ и намиране на МДНФ чрез подходящо премахване на импликанти в СДНФ.