

Глава 4

Двоични функции

Съвременните изчислителни устройства използват най-често двоична логика, т.е. на входовете и изходите на елементите им могат да се подават или получават само два различни сигнала. Ако на единия сигнал съпоставим цифрата 0, а на другия – цифрата 1, то ще получим, че до голяма степен работата на съвременните компютри се състои в преработване на редици от нули и единици. Важна част от това преработване е пресмятането на различни двоични функции, които са и основният предмет на настоящата глава.

Задачите за описване, минимизиране и реализиране на двоични функции са тясно свързани с важни етапи от проектирането и анализирането на реални изчислителни устройства.

4.1 Основни понятия

Да означим с B множеството $\{0, 1\}$. Да положим

$$B^n = B \times B \times \dots \times B,$$

където дясната страна на равенството е декартовото произведение на n множества B . Очевидно B^n се състои от всички подредени n -орки, съставени от нули и единици. Техният брой е 2^n . Елементите на B^n ще наричаме *двоични n -орки*, а в рамките на настоящата глава – само n -орки.

Определение 4.1.1 Под двоична функция

$$f : B^n \rightarrow B$$

на n променливи ще разбираме функция с област B^n и кообласт B .

Теорема 4.1.1 Броят на всички двоични функции на n променливи е 2^{2^n} .

Доказателство: Теоремата се доказва лесно по индукция. Очевидно, двоичните функции на една променлива са точно $2^{2^1} = 4$ (виж. таблица 4.1). На всяка двоична функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на n променливи може да се съпостави еднозначно обратимо поредната двойка от двоични функции на $n - 1$ променливи

$$\langle f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \rangle.$$

Броят на всички наредени двойки от горния вид, съгласно индукционното допускане е $2^{2^{n-1}}$. $2^{2^{n-1}} = 2^{2^n}$. \square

Една двоична функция $f : B^n \rightarrow B$ съпоставя на всяка двоична n -орка $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ стойностите 0 или 1. Поради тази причина е удобно да си представяме f като функция на n независими променливи x_1, x_2, \dots, x_n , при което променливите x_1, x_2, \dots, x_n и самата функция f приемат стойностите 0 или 1.

Определение 4.1.2 Ще казваме, че променливата x_i е **фиктивна** или **несъществена** за функцията f , ако е изпълнено

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Ако една променлива не е фиктивна, ще я наричаме **съществена**.

По-нататък няма да различаваме функции, които се получават една от друга с прибавяне или премахване на фиктивни променливи.

Според теорема 4.1.1 имаме 4 двоични функции на една променлива и 16 на две променливи. Всичките 4 функции на една променлива са зададени в таблица 4.1:

Таблица 4.1

x_1	0	x_1	$\overline{x_1}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Първата и четвъртата функция са *функции-константи* – за тях променливата x_1 е фиктивна. Тези функции означаваме съответно с 0 и 1 и съгласно нашата уговорка, не ги различаваме от двоичните константи 0 и 1, които може да се разглеждат като функции на нула променливи. Втората функция означаваме с x_1 и наричаме *търждественна* функция. Третата функция означаваме с \overline{x}_1 и наричаме *отрицание*. Веднага се проверява, че е в сила свойството $x_1 = \overline{\overline{x}_1}$, което наричаме закон на *двойното отрицание*.

Шестнадесетте функции на две променливи са зададени в таблица 4.2

Таблица 4.2

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

От тях ще отбележим следните функции:

f_0 , която е търждествено равна на 0; при нея променливите x_1 и x_2 са фиктивни и ние няма да различаваме тази функция от нулата, разглеждаме като функция на 0 или 1 променлива;

f_{15} , която е търждествено равна на 1 и може да се разглежда аналогично на 0;

f_1 , която ще означаваме с x_1x_2 и ще наричаме *конюнкция*; за същата функция се използват понякога означенията $x_1 \wedge x_2$ и $x_1 \& x_2$, както и наименованията *логическо умножение* и *логическо "и"*;

f_3 , която съвпада с търждествената функция x_1 ;

f_5 , която съвпада с търждествената функция x_2 ;

f_6 , която ще означаваме с $x_1 + x_2$ и ще наричаме *сума по модул 2*; същата функция се означава понякога с $x_1 \oplus x_2$ и се нарича *изключващо "или"*;

f_7 , която ще означаваме с $x_1 \vee x_2$ и ще наричаме *дизюнкция* (или *логическо "или"*);

f_8 , която ще означаваме с $x_1 \downarrow x_2$ и ще наричаме *функция* (или *стрелка*) на *Пирс*;

f_9 , която ще означаваме с $x_1 \equiv x_2$ и ще наричаме *еквивалентност*;

f_{13} , която ще означаваме с $x_1 \rightarrow x_2$ и ще наричаме *импликация*;

f_{14} , която ще означаваме с $x_1 | x_2$ и ще наричаме *функция* (или *черта*) на *Шефер*.

Ето някои от свойствата на тези функции:

1. $x_1 x_1 = x_1$, $x_1 \vee x_1 = x_1$, $x_1 + x_1 = 0$.
2. $x_1 x_2 = x_2 x_1$, $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$, $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.
3. $x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2)x_3$, $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$,
 $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$.
4. $x_1(x_2 \vee x_3) = (x_1 x_2) \vee (x_1 x_3)$, $x_1 \vee (x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$,
 $x_1(x_2 + x_3) = (x_1 x_2) + (x_1 x_3)$.
5. $x_1 0 = 0$, $x_1 \vee 0 = x_1$, $x_1 + 0 = x_1$.
6. $x_1 1 = x_1$, $x_1 \vee 1 = 1$, $x_1 + 1 = \overline{x_1}$.
7. $x_1 \overline{x_1} = 0$, $x_1 \vee \overline{x_1} = 1$, $x_1 + \overline{x_1} = 1$.
8. $\overline{(x_1 x_2)} = (\overline{x_1}) \vee (\overline{x_2})$, $\overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x_1})(\overline{x_2})$.

Първите две равенства в т.1 по-горе се наричат закони за *идемпотентност*, свойствата от т.3 – за *асоциативност*, от т. 4 – за *дистрибутивност* и накрая от т. 8 – *закони на Де Морган*.

Изброените свойства се доказват с директна проверка. Променливите във всички изрази могат да се заменят с константи по краен брой начини и не е трудно да се установи, че винаги десните страни на равенствата ще съвпадат с левите.

Пример 4.1.1 Да установим верността на първия закон на Де Морган. За това е достатъчна таблицата 4.3, в която са разгледани и четирите възможни замествания на променливите x_1 и x_2 с константи.

Таблица 4.3

x_1	x_2	x_1x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1x_2}$	$\overline{x-1} \vee \overline{x_2}$
0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Според закона за асоциативността (т.3) редът на пресмятане на функциите в изрази като $x_1x_2\dots x_k$, $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ не се отразява на крайния резултат и затова няма да поставяме в подобни изрази скоби, които да определят този ред. Освен това изразите ще станат по-прегледни и с по-малко скоби, ако въведем приоритети на функциите в един израз по следния начин: пресмятат се отляво надясно всички възможни

- а) подизрази, заградени в скоби;
- б) отрицания;
- в) конюнкции;
- г) дизюнкции и суми по модул 2;
- д) всички останали функции.

Пример 4.1.2 Така например вместо

$$((x_1x_2) \vee (\overline{x_3})) \rightarrow (x_3(x_4(x_5)) + x_6)$$

ще пишем

$$x_1x_2 \vee \overline{x_3} \rightarrow x_3x_4x_5 + x_6.$$

З а д а ч и

1. Докажете верността на свойствата от т.1-8.
2. Покажете, че $x_1(x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_k) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \dots \vee x_1x_k$ и че $x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_k) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_k$.
3. Пресметнете броя на двоичните функции на n променливи, които зависят съществено от всички свои променливи.
4. Нека A е множество от двоични функции. Да означим с A_n

множеството от всички функции на A , които зависят от n променливи. Ще казваме, че A се състои от почти всички двоични функции, ако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{2^{2^n}} = 1.$$

Докажете, че почти всички двоични функции зависят съществено от всичките си променливи.