

1.8 Ориентирани графи и пътища. Ориентирани дървета

Определение 1.8.1 Граф $G = \langle V, E \rangle$, на който всяко ребро е ориентирано, т.е. единият от краищата му е избран за начален (начало), а другия за краен (край) се нарича **ориентиран граф**.

Понякога ориентираният граф се бележи, чрез $\vec{G} \langle V, E \rangle$, а ако няма опасност от двусмислие, стрелката се пропуска. Ориентираното ребро \vec{x} , свързващо началото a с края му b , се нарича *изходящо* (*излизащо*) от a и *входящо* (*влизащо*) във върха b . Самите ориентирани ребра често ще наричаме *стрелки*.

Нека $a \in V$ и с $\deg^+(a)$ да означим броя на ребрата, които имат за начало върха a , т.е. които са изходящи за a , а с $\deg^-(a)$ броя на входящите в a ребра. Очевидно

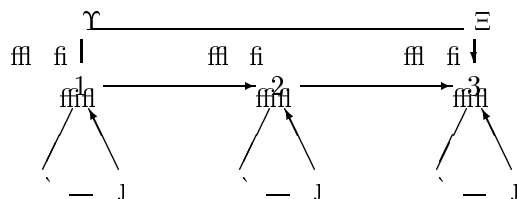
$$|E| = \sum_{a \in V} \deg^+(a) = \sum_{a \in V} \deg^-(a).$$

Ориентираните графи допускат и едно друго представяне, чрез двучленни отношения (релации). Нека ρ (ро) е релация в крайното множество V , с графика E , т.е. $a\rho b$ тогава и само тогава, когато $(a, b) \in E$.

Очевидно множеството E можем да считаме за множество от ориентирани ребра, като $\vec{x} = (a, b)$ е ребро на графа $G = \langle V, E \rangle$ с начало a и край b . Тъй като всяко множество E , $E \subset V \times V$ задава точно един граф с върхове във V следва, че всяка двучленна релация се представя с ориентиран граф и всеки ориентиран граф може да се разглежда като граф, получен от двучленна релация в множеството от неговите върхове.

Пример 1.8.1 Релацията \leq в множеството $V = \{1, 2, 3\}$ може да се опише, чрез диаграмата на Фиг. 1.8.1 и всъщност е графичното представяне на графа $G = \langle V, E \rangle$, където

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$



Фиг. 1.8.1

Краен ориентиран граф може да бъде зададен и чрез така наречената *матрица на съседство*. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е ориентиран граф, като $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Матрица на съседство за графа G се нарича квадратна матрица $M = (m_{ij})$, от ред n , за която

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } (a_i, a_j) \in E \\ 0, & \text{ако } (a_i, a_j) \notin E. \end{cases}$$

Ориентиран път в графа \vec{G} с дължина l се нарича редицата

$$a_0, \overrightarrow{x_1}, a_1, \dots, a_{l-1}, \overrightarrow{x_l}, a_l,$$

като $\overrightarrow{x_i}$ е ориентирано ребро, изхождащо от върха a_{i-1} и вхождащо във върха a_i . Ако всички върхове a_i в този път са различни, той се нарича *отворена ориентирана верига*, която свързва a_0 с a_l , а ако в него съвпадат само върховете a_0 и a_l се нарича *ориентиран цикъл*.

Ако съществува ориентирана верига, която свързва a с b , често се използва означението $a \Rightarrow b$ и се казва, че върхът b е *достижим* от върха a .

Повечето от понятията и теоремите за неориентирани графи се пренасят без затруднения и за ориентираните. Така например, теоремите с номера от ?? до ?? за неориентирани графи имат аналози и за ориентираните графи. (Опитайте се да ги формулирате и докажете!)

Определение 1.8.2 *Под ойлерова верига в ориентиран граф се разбира ориентирана верига, която съдържа всички ребра на графа.*

Определение 1.8.3 Ориентируваният граф \vec{G} се нарича **слабо свързан**, ако графът G , получен от \vec{G} , след като се абстрахираме от ориентацията на ребрата му е свързан.

Теорема 1.8.1 Ориентируваният граф $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ има ориентирана затворена ойлорова верига точно тогава, когато G е слабо свързан и за всяко $a \in V$ е в сила

$$\deg^+(a) = \deg^-(a).$$

Доказателството на тази теорема е аналогично на доказателството на Теорема ??, като се следи за ориентацията на ребрата. \square

Следствие 1 Ориентируваният граф $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ има отворена ойлорова верига точно тогава, когато е слабо свързан и съществуват точно два върха a и b , за които $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$, $\deg^-(b) = \deg^+(b) + 1$ и за всеки друг връх $c \in V$ е в сила $\deg^+(c) = \deg^-(c)$.

Върхът a на ориентирувания граф $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ се нарича **корен** на \vec{G} , ако всеки друг връх b е достижим от a , т.е. $a \Rightarrow b$. Ориентируваният граф \vec{G} се нарича **ориентирано дърво**, ако има корен и съответния му неориентиран граф е дърво.

Теорема 1.8.2 Всяко ориентирано дърво има точно един корен.

Доказателство: Да допуснем, че ориентираното дърво \vec{T} има два различни корена a_1 и a_2 . Следователно $a_1 \Rightarrow a_2$ и $a_2 \Rightarrow a_1$.

Ако се абстрахираме от ориентацията на ребрата ще следва, че върховете a_1 и a_2 могат да се свържат с две различни вериги и следователно, неориентираното дърво T ще има цикъл, което е противоречие. \square

Когато се построява граф на повече от една релация в дадено множество, е необходимо ребрата да се различават за

различните релации. Това е една от ситуациите, която ни довежда до понятието за *граф с отбелязани ребра* или *граф с тегла върху ребрата*.

Определение 1.8.4 Ориентиран граф с тегла (маркиран граф)

върху ребрата е наредена тройка $G = \langle V, E, X \rangle$, където V е множество от върховете на G , X – множество от тегла и $E \subset V \times X \times V$ е множества от ориентирани ребра с тегла.

Ако $(a_1, x, a_2) \in E$ се казва, че реброто с върхове a_1 и a_2 има тегло x . В този случай реброто от a_1 в a_2 се отбелязва на диаграмата със x . Два върха на графа G могат да се свързват с повече от едно ребро, които обаче имат различни тегла.

Да разгледаме следния пример.

Пример 1.8.2 Нека $V = \{3, 4, 6\}$ и да определим следните 5 двучленни релации във V :

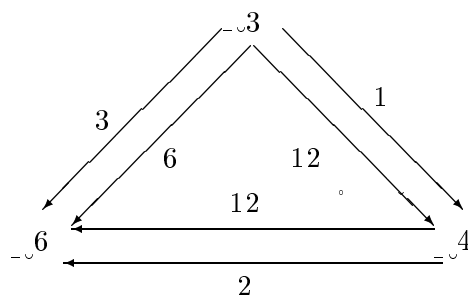
$$x \rho_i y \iff \text{НОД}(x, y) = i \text{ и } x < y \text{ за } i = 1, 2, 3,$$

$$x \rho_6 y \iff \text{НОК}(x, y) = 6 \text{ и } x < y$$

$$\text{и } x \rho_{12} y \iff \text{НОК}(x, y) = 12 \text{ и } x < y,$$

където НОД и НОК са съкращения за целочислените функции най-голям общ делител и най-малко общо кратно.

Тогава графът, който представя и петте релации е показан на Фиг. 1.8.2.

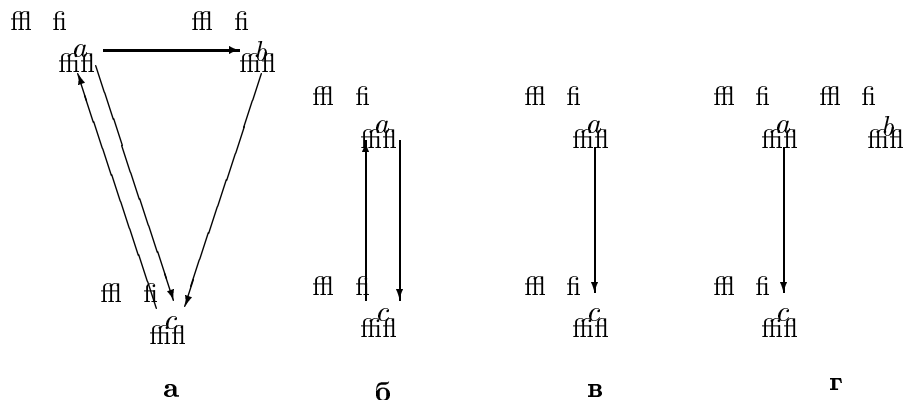


Фиг. 1.8.2

В случая, теглата са индексите i на релациите, в които са двата върха, свързани от съответните ребра. По аналогия на

тегла върху ребрата, се разглеждат и графи, които има тегла и върху върховете.

Определение 1.8.5 Нека $G = \langle V, E \rangle$ е ориентиран граф. Графът $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ ще наричаме **подграф** на G , ако $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$.



Фиг. 1.8.3

Например графите на Фиг. 1.8.3б, в, г са подграфи на графа, представен на Фиг.1.8.3а.

Понятието за *ориентирано дърво* допуска и една дефиниция по-близка до разглеждането на това понятие в информатиката, за описание на структури от данни, на елементи от езиците за програмиране, на алгоритми и др. Тя се базира на рекурентно определяне, относно броя на върховете, по следния начин:

Определение 1.8.6 (i) Дърво с един връх е всеки граф $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, за който $E_1 = \emptyset$ и $|V_1| = 1$. Корен на T_1 е единственият му връх. За листа на T_1 считаме елементите на множеството V_1 (в случая то се състои от единствения връх на T_1).

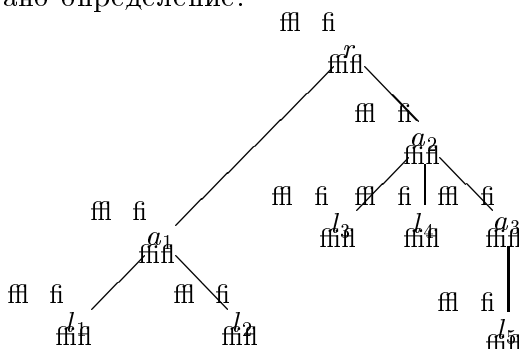
(ii) Нека $T_k = \langle V_k, E_k \rangle$ е дърво с k -върха и $L_k \subset V_k$ е множеството от листа на T_k , като $r \in V_k$ е корен на T_k .

(iii) За получаване на дърво T_{k+1} с $k+1$ върха, избираме произволен връх $u \notin V_k$ и прекарваме ребро (a, u) за произволно $a \in V_k$. Полученият граф е дърво с $k+1$ върха, като неговият корен съвпада

с корена r на T_k , а множеството му от листа е

$$L_{k+1} = (L_k \cup \{u\}) \setminus \{a\}.$$

Докажете, че това определение на дървета е еквивалентно на даденото по-рано определение.



Фиг. 1.8.4

Следователно листата на дърветата не са начало на някои стрелки, докато коренът не е край на никоя стрелка. Графически дърветата могат да се представят, като корена се разположи най-високо и ребрата се ориентират от горе надолу (Фиг. 1.8.4). Тази уговорка ни дава възможност да заменяме понякога стрелките с обикновени неориентирани ребра.

Максималната дължина на път в дадено ориентирано дърво се нарича негова *височина* (*дълбочина*).

Лема 1.8.1 *Най-дългият път в едно дърво свързва корена на дървото с някой негов лист.*

Доказателство: Нека T е дърво с един връх. Очевидно твърдението на лемата за това дърво е вярно.

Да допуснем, че за всяко дърво с k върха, лемата е вярна, т.е. най-дългия път в него свързва корена му r с някой негов лист l_i .

Нека T е дърво с $k + 1$ върха и T_k е дърво с k върха, от което T е получено с добавянето на новия връх u и реброто (a, u) (Виж рекурентното определение на дърво по-горе). Ако r е корен на T и T_k , то най-дългият път в T_k свързва корена r с някои листа на T_k . Ясно е, че най-дългият път в T може да е по-голям от най-дългия път в T_k с не повече от едно ребро. Също така се вижда, че такава разлика може да се получи, ако a е лист в T_k и пътят от r до a е най-дългия в T_k . Но тогава най-дългият път в T ще свързва r с u . Ако a не е лист, за който пътят от r до a да е най-дълъг в T_k , то всеки най-дълъг път в T_k ще бъде такъв и в T . \square

Следващата теорема напълно характеризира дърветата и често се използва за дефиниция. Тя може да се докаже индуктивно по броя на върховете.

Теорема 1.8.3 *Ориентираният граф $G = \langle V, E \rangle$ е дърво точно тогава, когато съществува връх $r \in V$ така, че за всеки връх a на G има точно един ориентиран път от r до a .* \square

При описанието на дърветата често се използва генеалогическа терминология. Така, ако върховете a_1 и a_2 са свързани с ребро (a_1, a_2) , то a_1 се нарича *връх-родител* на a_2 , а a_2 – *дъщерен връх* на a_1 , също така, ако от a_1 до a_2 съществува път в дървото, се казва, че a_1 е *предшественик* на a_2 и че a_2 е *потомък* на a_1 .

Определение 1.8.7 *Ориентираният граф \vec{G} се нарича **силно свързан**, ако за всеки два негови върха a и b е в сила $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$.*

Очевидно върховете на произволен ориентиран граф могат да се групират в класове на еквивалентност, като $a \sim b$ точно тогава когато $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$. Тези класове на еквивалентност разбиват графа на неговите *силно свързани компоненти*:

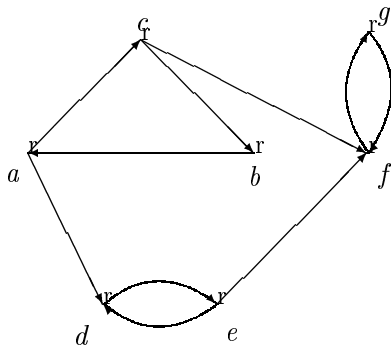
$$\langle V_1, E_1 \rangle, \langle V_2, E_2 \rangle, \dots, \langle V_k, E_k \rangle.$$

Пример 1.8.3 Да се намерят силно свързаните компоненти на ориентирания граф даден на Фиг. 1.8.5.

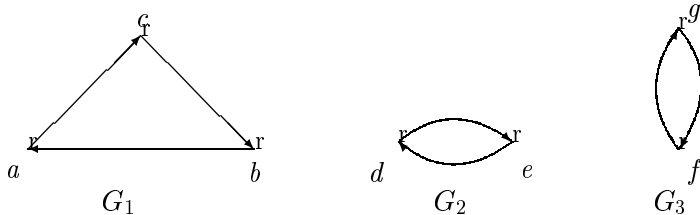
Съгласно казаното следните еквивалентности са изпълнени:

$$a \sim b \sim c$$

$$d \sim e \quad \text{и} \quad f \sim g.$$



Фиг. 1.8.5



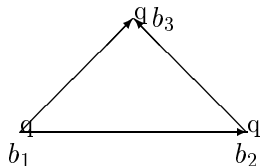
Фиг. 1.8.6

Следователно силно свързаните компоненти на този граф са тези, които са представен на Фиг. 1.8.6.

Нека $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_k$, като $\vec{G}_i = \langle V_i, E_i \rangle$ за $i = 1, 2, \dots, k$ са силно свързаните компоненти на графа \vec{G} . Разглеждаме следния граф $\vec{G}' = \langle V', E' \rangle$, за които

$$V' = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

и $(b_i, b_j) \in E'$ точно тогава, когато съществува ориентирано ребро в \vec{G} , което свързва някои връх от V_i с някои връх от V_j . Така полученият граф \vec{G}' се нарича *свиване* (*съкращение*) на графа G . На графа от Пример 1.8.3, свиването е представено на фиг. 1.8.7.



Фиг. 1.8.7

Ясно е, че ако \vec{G} е ориентирано дърво с корен r , то $\deg^-(r) = 0$ и за всеки друг връх b на \vec{G} е в сила $\deg^-(b) = 1$.

Както при неориентираните графи, така и тук се разглеждат *покриващи ориентирани дървета*.

Една от важните задачи в теория на графите е задачата за намиране на път, който свързва два върха и има минимална дължина. Тази оптимизационна задача има и чисто практическо значение в някои дейности, допускащи моделиране с графи.

За решаването на задачата успешно може да се използва матрицата на съседство M на графа $\vec{G} = \langle V, E \rangle$.

Нека например да се интересуваме от път с минимална дължина, който свързва върховете a_i и a_j от V .

Ясно е, че ако $m_{ij} \neq 0$, то съществува път с дължина 1 и той е минимален измежду всички пътища, свързващи a_i и a_j .

Да разгледаме матрицата

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}^{(2)} & m_{12}^{(2)} & \dots & m_{1n}^{(2)} \\ m_{21}^{(2)} & m_{22}^{(2)} & \dots & m_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ m_{n1}^{(2)} & m_{n2}^{(2)} & \dots & m_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

където

$$m_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n m_{ik} \cdot m_{kj}.$$

Числото $m_{ij}^{(2)}$ е броя на всички пътища с дължина 2, които свързват a_i и a_j , тъй като

$$m_{ik}m_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{ако ребрата } (a_i, a_k), (a_k, a_j) \text{ са в } E; \\ 0, & \text{в противния случай.} \end{cases}$$

Аналогично се получават матриците $M^3, M^4, \dots, M^t, \dots$ съответно с елементи $(m_{ij}^{(t)})$. Лесно се вижда, че $m_{ij}^{(t)}$ е броя на пътищата с дължина t , свързващи a_i с a_j .

След като получим матриците M, M^2, M^3, \dots можем да разгледаме техните елементи на i -ия ред и j -ия стълб, т.е.

$$(*) \quad m_{ij}, m_{ij}^{(2)}, m_{ij}^{(3)}, \dots$$

Минималната дължина на пътят, който свързва a_i и a_j е числото l , за което $m_{ij}^{(l)} \neq 0$ и $m_{ij}^{(r)} = 0$, при $l > r$, т.е. минималният път има дължина равна на номера на първото ненулево число в горната редица $(*)$.

Като се вземе предвид, че умножаването на матрици изисква сравнително сложни пресмятания, целесъобразно е да се търсят други начини за решаване на тази задача. Ще изложим още един начин, при който се използва рекурентно изграждане на множества. Този начин се състои в изпълнението на следния алгоритъм.

1. Полагаме $S_0 = \{a_i\}$. Ако $a_j \in S_0$, то задачата е решена и $l = 0$. В противен случай преминаваме на стъпка 2.

2. Полагаме $S_k = \{a_t \in V \mid d(a_t, S_{k-1}) = 1\} \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$, където $d(a_t, S_{k-1}) = 1$ означава, че съществува връх $a_p \in S_{k-1}$, така, че $(a_p, a_t) \in E$.

Ако $a_j \in S_k$, то задачата е решена и $l = k$. В противен случай увеличаваме k с едно и преминаваме към стъпка 2. \square

З а д а ч и

1. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е ориентиран граф. Да се докаже, че

$$|E| = \sum_{a \in V} \deg^+(a) = \sum_{a \in V} \deg^-(a).$$

2. Да се докаже, че свързаният ориентиран граф G е дърво точно тогава, когато съществува единствен връх r , за който $\deg^-(r) = 0$, а за всички останали върхове a на G е в сила $\deg^-(a) = 1$.

3. Да се докаже, че ако ориентираният граф G е дърво, то G няма цикъл.

4. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е дърво с височина k и всеки негов връх, които не е лист има по два дъщерни върха. Да се докаже, че

$$2k + 1 \leq |V| \leq 2^{k+1} - 1.$$

5. Да се докаже, че ако G е ориентиран граф без цикли, то съществува връх a на G , за който $\deg^+(a) = 0$.

6. Да се докаже, че ако за всеки връх a на ориентирания граф $G = \langle V, E \rangle$ е в сила

$$\min(\deg^+(a), \deg^-(a)) \geq \frac{1}{2}(|V| - 1),$$

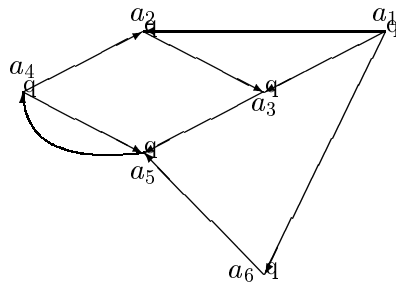
то G е силно свързан.

7. Да се докаже, че броят на ориентираните ойлерови вериги в граф с n върха и повече от $2n$ ребра е четно число.

8. Да се докаже, че ако в едно дърво дължината на всеки път, който свързва корена с някои лист е k и всеки връх, който не е лист има по m дъщерни върха, то всички върхове на дървото

са $\frac{m^{k+1} - 1}{m - 1}$.

9. Да се получи матрицата на съседство за графа на Фиг. 1.8.8.
Да се намери минимален път, който свързва върховете a_1 и a_4 .



Фиг. 1.8.8