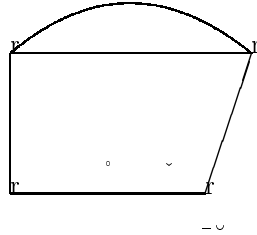


## 1.7 Неориентирани графи. Пътища. Свързаност. Ойлерови графи

Най-обща представа за граф, можем да добием, като конфигурация от линии, които свързват някои точки. Линиите се наричат ребра, а точките върхове на графа (Фиг. 1.7.1).



Фиг. 1.7.1

**Определение 1.7.1** *Под граф* ще разбираме наредена двойка  $G = \langle V, E \rangle$  от две множества  $V$  и  $E$ , като  $V$  е крайно, а  $E$  е множество от ненаредени двойки, елементи на  $V$ .

Елементите на  $V$  се наричат *върхове* на  $G$ , а тези на  $E$  *ребра* на графа, при това за реброто  $(a, b)$  казваме, че *свързва върховете*  $a$  и  $b$  (че е *инцидентно* с върховете  $a$  и  $b$ ), а върховете  $a$  и  $b$  се наричат *крайщата на реброто*  $(a, b)$ . Когато два върха са крайща на едно и също ребро се наричат *съседни*.

Броят на ребрата, които са инцидентни с даден връх  $a$  на графа  $G$  се нарича *степен (валентност)* на  $a$  и се бележи с  $\deg(a)$ .

На Фиг. 1.7.1 има ребро, което свързва един и същи връх сам със себе си. Такъв връх ще наречем *самосвързан*. Някои двойки върхове се свързват с повече от едно ребро, както е на Фиг. 1.7.1. Такива ребра се наричат *паралелни (успоредни)*.

Граф, в които няма паралелни ребра и самосвързани върхове се нарича *прост граф*.

За простите графи е в сила следната зависимост:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{a \in V} \deg(a).$$

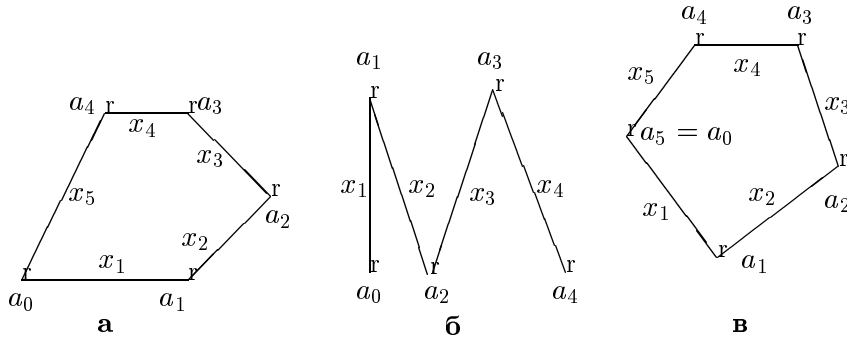
**Теорема 1.7.1** *Броят на върховете  $a$  в прост граф, за които  $\deg(a)$  е нечетно, е четно число.*

Доказателството на теоремата се получава от горното равенство и от това, че  $\sum_{a \in V} \deg(a)$  е четно число.  $\square$

Един връх  $a$  се нарича *изолиран*, ако  $\deg(a) = 0$  и *краен*, ако  $\deg(a) = 1$ .

Нека  $G = \langle V, E \rangle$  и  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$  са два графа. Тогава  $G_1$  се нарича *подграф* на  $G$ , ако  $V_1 \subset V$  и  $E_1 \subset E$ .

Всяка редица от вида  $t = a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, a_{l-1}, x_l, a_l$ , където  $a_i \in V$ ,  $x_i = (a_i, a_{i-1}) \in E$  се нарича *път с дължина  $l$* , съединяващ върховете  $a_0$  и  $a_l$ . Ако  $a_0 \neq a_l$ , той се нарича *отворен*, а в противния случай *затворен*. Път, на който всички ребра са различни се нарича *прост път* (Фиг. 1.7.2а).



Фиг. 1.7.2

Отворен път, на който всички върхове са различни се нарича *верига съединяваща  $a_i$  с  $a_l$*  и се бележи с  $(a_i, a_l)$ -верига (Фиг. 1.7.2б).

Затворен прост път, на който всички върхове са различни, се нарича *цикл* (Фиг. 1.7.2в).

Без сериозни трудности, може да се докаже следната теорема:

**Теорема 1.7.2** *Ако между два върха  $a_0$  и  $a_l$ , в даден граф, съществува прост път, който ги свързва, то между тях може да се построи  $(a_0, a_l)$ -верига или цикъл, съдържащ тези върхове.*

Да отбележим, че изискването, пътът между  $a_0$  и  $a_l$  да е прост е съществено.

Доказателството на Теорема 1.7.2 може да се извърши, като разгледаме път, който свързва  $a_0$  с  $a_l$  и е минимален, относно включването в себе си на ребра от зададения прост път. Съществуването на такъв път е обезпечено от това, че  $a_0$  и  $a_l$  са свързани с прост път. Така избраният път е или  $(a_0, a_l)$ -верига или цикъл.  $\square$

Следващата теорема, освен с важността си е интересна и с типичния за теорията на графите начин на доказване.

**Теорема 1.7.3** *Нека  $G = \langle V, E \rangle$  е граф, на който всички върхове имат четна степен. Тогава за всяко ребро  $x$ , съществува затворен прост път, който съдържа това ребро.*

**Доказателство:** Нека  $x = (a_i, a_j)$  е произволно ребро от  $G$ . Тъй като  $\deg(a_j)$  е четно следва, че съществува ребро  $x_1$ , различно от  $x$ , което е инцидентно с  $a_j$ , като  $x_1 = (a_j, a_1)$ ,  $a_1 \neq a_j$ . Пътят  $a_i, x, a_j, x_1, a_1$  е прост.

Да предположим, че вече сме построили простия път  $a_i, x, a_j, x_1, a_1, \dots, x_k, a_k$ , които има дължина  $k + 1$ .

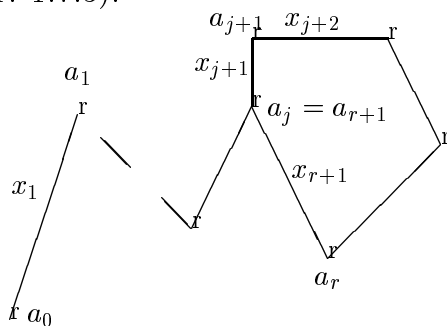
Като проведем същите разсъждения за  $a_k$ , както за  $a_j$  и  $a_1$  ще получим прост път с дължина  $k + 2$ . Така получаваме редица от прости пътища с увеличаваща се дължина. Тъй като графът  $G$  е краен следва, че за някое  $k$  този процес на построяване на нови пътища с по-голяма дължина ще бъде преустановен. Това означава, че последният построен прост път завършва в  $a_i$ , тъй като  $\deg(a_i)$  е четно и  $\deg(a_i) \geq 2$ . С това теоремата е доказана.  $\square$

Друго важно свойство на графите, които имат върхове само от четна степен, е възможността те да се представят, като обединение от цикли без общи ребра.

**Теорема 1.7.4** Ако  $G = \langle V, E \rangle$  е граф, на който върховете са от четна степен и  $E \neq \emptyset$ , то  $E$  се представя, като обединение на множества от ребрата на няколко цикли, които два по два нямат общи ребра.

**Доказателство:** Да разгледаме един произволен прост път, построен по начина описан в доказателството на предишната теорема  $a_0, x_1, a_1, x_2, a_2, \dots$

Някои от върховете в този път могат да съвпадат по между си. Нека  $a_1, a_2, \dots, a_r$  са всичките, различни по между си върхове, а  $a_{r+1}$  е връх измежду  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Да предположим, че  $a_{r+1} = a_j$ , за някое  $j$ ,  $1 \leq j \leq r$ . Очевидно ребрата  $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{r+1}$  образуват цикъл (Фиг. 1.7.3).



**Фиг. 1.7.3**

Да означим с  $E' = E \setminus \{x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{r+1}\}$  и  $G' = \langle V, E' \rangle$ . Без особени затруднения се установява, че върховете на  $G'$  са от четна степен. При положение, че  $E' \neq \emptyset$ , то процесът на отстраняване на ребра на прости цикли, може да се продължи докато се получи граф с празно множество от ребра, с което теоремата е доказана.  $\square$

От тази теорема се получават две следствия, първото, от които е обобщение на Теорема 1.7.3.

**Следствие 1** Ако  $G$  е граф, на който всички върхове имат четна степен, то за всяко ребро  $x$  на  $G$  съществува цикъл в  $G$ , съдържащ реброто  $x$ .

**Следствие 2** Ако в графа  $G$  съществуват две различни вериги  $P_1$  и  $P_2$ , които свързват различните по между си върхове  $a$  и  $b$  на  $G$ , то от някои ребра на  $P_1$  и  $P_2$ , може да се построи цикъл.

**Теорема 1.7.5** Ако  $G = \langle V, E \rangle$  е краен граф, то следните две твърдения са еквивалентни

- (i) съществува път в  $G$  с дължина по-голяма от  $n$ ,  $n = |V|$ ;
- (ii) в  $G$  съществува цикъл.

**Доказателство:** (ii)  $\Rightarrow$  (i). Нека  $c = a_0, x_1, a_1, \dots, x_s, a_s = a_0$  е произволен цикъл в  $G$ , тогава за всяко  $t$  редицата  $c_t = \underbrace{cc \dots c}_t$  е

път в графа  $G$ . Тъй като  $c$  е цикъл с дължина поне едно, следва, че дължината на  $c_t$  е поне  $t$ . Следователно, ако изберем  $t > n$  ще следва, че  $c_t$  е път в  $G$  с дължина по-голяма от  $n$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Нека  $a_0, x_1, a_1, \dots, x_s, a_s$  е произволен път в  $G$ , за който  $s > n$ . Следователно съществуват числа  $k$  и  $r$ ,  $0 < k \leq r \leq s$ , такива, че  $a_k$  и  $a_r$  са един и същи връх на  $G$ , т.е.  $a_k, x_{k+1}, a_{k+1}, \dots, x_r, a_r$  е път в  $G$ . Тъй като  $a_k$  и  $a_r$  съвпадат следва, че този път е цикъл.  $\square$

Графът  $G = \langle V, E \rangle$  се нарича *свързан*, ако между всеки два негови върха съществува път, който ги свързва.

Да разгледаме един произволен граф  $G = \langle V, E \rangle$ . Нека  $S \subset V$  и с  $E(S)$  да означим множеството от всички ребра на  $G$ , на които и двата краища са в  $S$ . Графът  $\langle S, E(S) \rangle$  се нарича *подграф* на  $G$ , породен от множеството  $S$ .

Да въведем в множеството  $V$  от върхове на графа  $G$  двучленната релация  $\sim$ , като  $a \sim b$  точно тогава, когато  $a = b$  или съществува път в  $G$ , който свързва върховете  $a$  и  $b$ .

Очевидно  $a \sim a$  за всяко  $a \in V$ , а от друга страна всеки път, който свързва  $a$  с  $b$  ще свързва и  $b$  с  $a$ , т.е. от  $a \sim b$  следва,

че  $b \sim a$ . Нека  $a \sim b$  и  $b \sim c$ . Следователно съществува  $(a - b)$ -верига и  $(b - c)$ -верига. Очевидно обединението на тези вериги дава път, който свързва  $a$  с  $c$ , т.е.  $a \sim c$ . Ето защо  $\sim$  е еквивалентност в  $V$  и нека  $V_1, V_2, \dots, V_k$  са класовете на еквивалентност при нея.

Подграфите  $G_i = \langle V_i, E(V_i) \rangle$ , за  $i = 1, 2, \dots, k$ , се наричат *свързани компоненти* на графа  $G$ , а техният брой  $k$  се нарича *степен на свързаност* на  $G$ .

Ако  $x$  е ребро на графа  $G$ , то с  $G - x$  ще означаваме графа  $G - x = \langle V, E \setminus \{x\} \rangle$ .

**Теорема 1.7.6** *Ако графът  $G$  е свързан и реброто  $x$  принадлежи на някои цикъл, то  $G - x$  е свързан граф.*

Доказателството на тази теорема следва от факта, че във всеки път, който свързва два върха  $a_1$  и  $a_2$  и съдържа реброто  $x$ , можем да заменим  $x$  с останалата част от цикъла, след като отделим от него  $x$ . Полученият по този начин път, отново свързва върховете  $a_1$  и  $a_2$ .

Вярна е и обратната на Теорема 1.7.6.

**Теорема 1.7.7** *Ако  $G - x$  е свързан граф, то  $G$  е свързан граф и съществува цикъл на  $G$ , който съдържа реброто  $x$ .*

**Доказателство:** Нека  $a_1$  и  $a_2$  са крайщата на реброто  $x$ . Тъй като  $G - x$  е свързан граф, то съществува в него  $(a_1, a_2)$ -верига  $P_1$ . Очевидно  $P_1 \cup \{x\}$  е цикъл в  $G$ .  $\square$

Реброто  $x$  на графа  $G$  се нарича *мост*, ако графите  $G$  и  $G - x$  имат различна степен на свързаност.

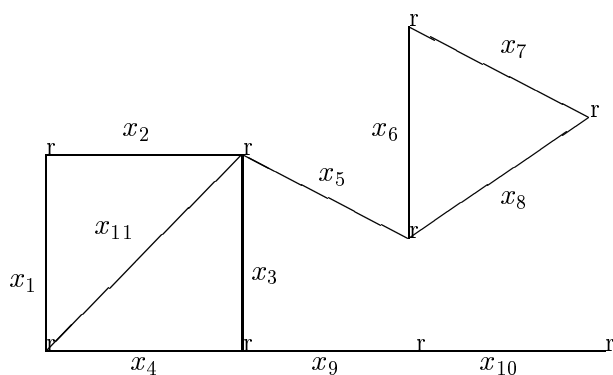
Следващата теорема характеризира ребрата, които са мостове в даден граф и е пряко следствие от предишните две теореми.

**Теорема 1.7.8** *Реброто  $x$  на графа  $G$  е мост точно тогава, когато  $x$  не участва в нито един цикъл на  $G$ .*  $\square$

**Пример 1.7.1** Да се намерят всички мостове на графа, представен на Фиг. 1.7.4. Съгласно Теорема 1.7.8, мостовете на този граф са:  $x_5, x_9, x_{10}$ .

**Определение 1.7.2** Всеки прост път, който съдържа всички ребра на графа  $G$  се нарича ойлерова верига (път) в  $G$ .

Намирането на ойлеров път в даден граф е една от първите задачи в теорията на графите и до голяма степен може да се смята, че с нейното решаване започва съдържателното развитие на тази теория.



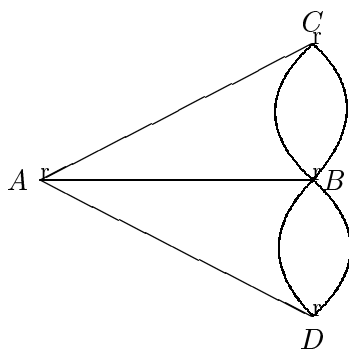
Фиг. 1.7.4

Тази задача възниква във връзка с обхождането на мостовете на река Прегол. През Кьонинсберг, реката протича, като образува два острова  $A$  и  $B$ , които са съединени с мостове, както е показано на Фиг. 1.7.5.

Задачата се състои в това, тръгвайки от произволен участък на сушата  $A, B, C$  или  $D$ , да се преминат всички мостове само по веднъж и да се достигне отново в началния участък от сушата.

Фиг. 1.7.5

Дълго време се е считало, че задачата няма решение и едва през 1736 г. великият швейцарски математик Леонард Ойлер дава окончателен отговор, като я свежда до намирането на ойлерова затворена верига за графа представен на Фиг. 1.7.6.



Фиг. 1.7.6

Следващите две теореми изчерпват въпроса за съществуване на ойлерови пътища в графите.

**Теорема 1.7.9** *Свързаният граф  $G = \langle V, E \rangle$  има затворен ойлеров път точно тогава, когато всичките му върхове имат четна степен.*

**Доказателство:** Очевидно, на всеки свързан граф, който има затворен ойлеров път, върховете са от четна степен.



Да докажем сега, че всеки свързан граф  $G$ , на който всички върхове имат четна степен, има затворен ойлеров път.

От Теорема 1.7.3 следва, че в  $G$  има затворен прост път

$$P : a_0, x_1, a_1, \dots, x_t, a_t = a_0$$

с максимален брой ребра.

Да допуснем, че в графа  $G$  има върхове, които не участвуват в този път. Нека например върхът  $a$  на  $G$  не принадлежи на  $P$ . Тъй като  $G$  е свързан граф следва, че за всяко  $i$ ,  $0 \leq i \leq t-1$  съществува верига  $P_i$ , която свързва върха  $a$  с върха  $a_i$ .

Нека  $j$  е такава, че  $P_j$  е най-кратката измежду веригите  $P_i$  за  $i = 0, 1, \dots, t-1$  и без ограничение да приемем, че

$$P_j : a = b_0, y_1, b_1, \dots, y_r, b_r = a_j.$$

Очевидно  $r \geq 1$  и

$$\{b_0, b_1, \dots, b_{r-1}\} \cap \{a_0, a_1, \dots, a_{t-1}\} = \emptyset$$

и следователно реброто  $y_r$  не участвува в пътя  $P$ . Нека  $E' = E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ . Тъй като пътят  $P$  е затворена верига, то върховете на графа  $G' = \langle V, E' \rangle$  имат четна степен. От теорема 1.7.3 следва, че съществува прост затворен път в  $G'$ , който включва реброто  $y_r$  и нека той е

$$P' : a_j, y_r, \dots, a_j.$$

Сега, ако в  $P$  заменим  $a_j$  с пътя  $P'$ , ще получим противоречие с това, че  $P$  е затворен път с максимален брой ребра в  $G$ . Следователно в  $P$  са включени всички върхове на графа  $G$ .

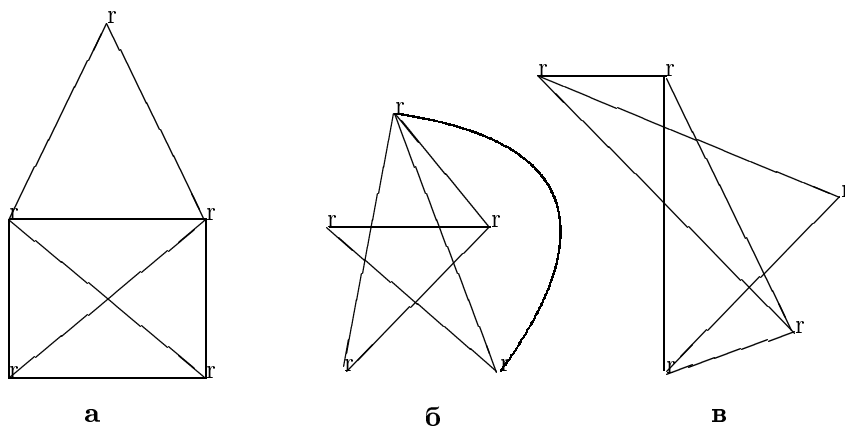
Да допуснем сега, че в  $P$  не са включени всички ребра. Следователно съществува ребро  $x$ , което не е в  $P$  и има за един от своите краища някой от върховете в  $P$ , например  $a_i$ . Както достигнахме до противоречие, чрез  $y_r$  и  $a_j$  в предишната част от доказателството, така и тук с  $x$  и  $a_i$  можем да построим затворен път в  $G$  с по-голям брой ребра, отколкото са в  $P$ . С това противоречие, теоремата е доказана.  $\square$

**Следствие 1** *Свързаният граф  $G = \langle V, E \rangle$  има отворен ойлеров път тогава и само тогава, когато  $G$  има точно два върха от нечетна степен.*

Граф, който има ойлеров път често се нарича *ойлеров граф*.

**Пример 1.7.2** Кои от графите на Фиг. 1.7.7 са ойлерови. Съгласно Теорема 1.7.9 и нейното следствие следва, че:

- графът на Фиг. 1.7.7а е ойлеров, тъй като има отворен ойлеров път и притежава точно два върха от нечетна степен;
- графът на Фиг. 1.7.7б е ойлеров, тъй като има затворен ойлеров път и всичките му върхове са с четна степен;
- графът на Фиг. 1.7.7в не е ойлеров, тъй като има 4 върха от степен 3.



**Фиг. 1.7.7**

Лесно се съобразява, че ако един граф има отворен ойлеров път, то краищата на този път са двата върха, чиято степен е нечетна, докато за графите, които имат затворен ойлеров път за краищата на такъв път може да се вземе кой да е връх на графа.

**Определение 1.7.3** *Свързан граф без цикли се нарича дърво.*

Очевидно всеки два върха в едно дърво, могат да се свързват с верига, а от Следствие 2 на Теорема 1.7.4 следва, че такава верига е единствена. Обратното също е вярно, т.е. ако в един свързан граф всеки два върха могат да се свържат само с една верига, то този граф няма цикли. Така достигнахме до следната теорема.

**Теорема 1.7.10** *Един граф е дърво, точно тогава, когато между всеки два негови различни върха съществува точно една верига.*

Следващата теорема и нейното следствие са очевидни.

**Теорема 1.7.11** *Всяко дърво, съдържащо поне едно ребро има поне два крайни върха.*

**Следствие 1** *Всяко дърво с поне два различни върха има поне два крайни върха.*

Лесно се съобразява, че ако от едно дърво отстраним кой и да е краен връх заедно с инцидентното с него ребро ще получим отново дърво.

**Теорема 1.7.12** *Всяко дърво с  $n$  върха има точно  $n - 1$  ребра.*

**Доказателство:** При  $n = 1$ , очевидно всяко дърво се състои само от един връх и  $n - 1 = 0$  ребра. Да допуснем, че теоремата е вярна при  $n = k$  и да разгледаме произволно дърво  $T$  с  $k + 1$  върха. От следствието на Теорема 1.7.11 следва, че  $T$  има поне един краен (заключителен) връх. Нека  $a$  е произволен заключителен връх на  $T$ , и  $x$  е единственото ребро, инцидентно с  $a$ .

Да разгледаме дървото  $T'$ , получено от  $T$  след като отстраним от него връх  $a$  и реброто  $x$ . Очевидно  $T'$  има  $k$  върха и съгласно допускането ще има  $k - 1$  ребра. Следователно  $T$  ще има  $k + 1$  върха и  $k$  ребра.  $\square$

Нека  $G = \langle V, E \rangle$  е свързан граф. Всяко дърво, което е подграф на  $G$  и съдържа всички върхове на  $G$  се нарича *покриващо дърво* за  $G$ .

**Теорема 1.7.13** *Всеки свързан граф има поне едно покриващо дърво.*

Доказателството на тази теорема следва непосредствено от Теорема 1.7.6

**Следствие 1** *Свързан граф  $G$  с  $n$  върха и  $n - 1$  ребра е дърво.*

**Доказателство:** Ако допуснем, че в  $G$  има цикъл, то съгласно Теорема 1.7.6 от него, след като отстраним само едно ребро  $x$ , полученият граф  $G - x$  отново е свързан и има  $n$  върха и  $n - 2$  ребра. Съгласно Теорема 1.7.13  $G - x$  има покриващо дърво  $T$ , което има  $n$  върха и не повече от  $n - 2$  ребра. Това противоречи на Теорема 1.7.12.  $\square$

**Следствие 2** *Ако  $G$  е свързан граф с  $n$  върха и  $q$  ребра, то*  

$$q - n + 1 \geq 0.$$

Нека  $k$  е степен на свързаност на графа  $G = \langle V, E \rangle$ , а  $p$  е броя на върховете и  $q$  – броя на ребрата на  $G$ . Числото

$$\mu = q - p + k$$

се нарича *цикломатическо число* на  $G$ .

Нека  $G_1, G_2, \dots, G_k$  са свързаните компоненти на графа  $G$ , които имат съответно  $p_1, p_2, \dots, p_k$  върхове и  $q_1, q_2, \dots, q_k$  ребра, като техните цикломатически числа са

$$\mu_i = q_i - p_i + 1 \text{ за } i = 1, 2, \dots, k.$$

Тогава следното равенство е очевидно

$$\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i.$$

Доказателството на следващата теорема, предоставяме за самостоятелно упражнение.

**Теорема 1.7.14** Цикломатическото число на всеки граф е цяло и е 0 точно тогава, когато графът е дърво.

### З а д а ч и

1. Да се докаже, че един граф  $G = \langle V, E \rangle$  с  $|V| \geq 3$  е свързан точно тогава, когато съществуват поне два върха  $a$  и  $b$  от  $V$  така, че графите  $G_a = \langle V_a, E(V_a) \rangle$  и  $G_b = \langle V_b, E(V_b) \rangle$  са свързани, където  $V_a = V \setminus \{a\}$  и  $V_b = V \setminus \{b\}$ .
2. Нека  $G = \langle V, E \rangle$  и  $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ , където  $\bar{E} = V \times V \setminus E$ . Да се докаже, че поне един от графите  $G$  или  $\bar{G}$  е свързан.
3. Да се докаже, че ако за всеки връх  $a$  на графа  $G = \langle V, E \rangle$  е в сила неравенството

$$\deg(a) \geq \frac{1}{2}(|V| - 1),$$

то  $G$  е свързан граф.

4. Да се докаже, че в граф с цикломатическо число 1 има точно един цикъл.
5. Да се докаже, че ако в един граф има точно два върха  $a$  и  $b$  с нечетна степен, то съществува  $(a, b)$ -верига в графа.
6. Да се докаже, че всеки две вериги с максимални дължини в даден свързан граф имат поне един общ връх.
7. Да се докаже, че ако  $G$  е граф с  $n$  върха и  $m$  ребра, като  $m < n - 1$ , то  $G$  не е свързан граф.
8. Да се докаже, че ако  $x$  е ребро в графа  $G$ , то следните твърдения са еквивалентни:
  - (i)  $x$  е мост в  $G$ ;
  - (ii) съществуват два различни върха  $a$  и  $b$  на  $G$  така, че  $x$  принадлежи на всяка  $(a, b)$ -верига;
  - (iii) в графа  $G$  няма нито един цикъл, който да съдържа  $x$ .