

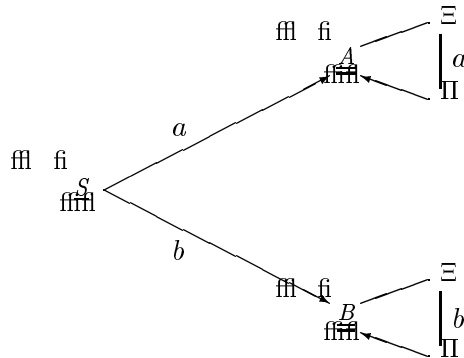
2.5 Крайни автомати

Нека $\Gamma = \langle V, W, S, P \rangle$ е автоматна граматика. Освен със задаването на компонентите V, W, S, P , тази граматика допуска и представяне, чрез ориентиран граф, на които ребрата се обозначават с елементи от V , а върховете с елементи от W .

Пример 2.5.1 Да вземем например граматиката

$$\Gamma = \langle \{a, b\}, \{S, A, B\}, S, \{S \rightarrow aA|bB, A \rightarrow aA|a, B \rightarrow bB|b\} \rangle.$$

За нея можем да построим следния граф



Фиг. 2.5.1

В този граф върхът S е начало на всеки път по графа. Това че S е начало, условно ще означаваме, като го подчертаваме с една линия. Всеки един от върховете A и B може да бъде краен за пътищата в графа. Тази възможност е отразена, като двата върха са подчертани с двойна линия.

Да разгледаме произволен път, започващ от S и завършващ например във върха A . Буквите, с които са снабдени ребрата на конкретния път образуват дума над V . Например пътят $S \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$ еднозначно определя думата aaa .

Лесно е да се види, че всички думи, породени от граматиката Γ могат да се получат от всички пътища в графа, които свързват началото S с крайните върхове A или B .

Такива ориентирани графи с избрано начало и крайни върхове, представляват *крайни автомати без памет*.

Определение 2.5.1 *Под детерминиран краен автомат (ДКА)*

ще разбираме всяка наредена петорка $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$, където:

- V е крайно множество от входни букви (входна азбука);*
- K е крайно множество от състояния на автомата (азбука от състоянията);*
- $\delta : K \times V \rightarrow K$ е функция на преходите, която по текущото състояние и входна буква привежда автомата в ново състояние;*
- q_0 е начално състояние на автомата;*
- $F \subset K$ е множество от крайни състояния на автомата.*

В случаите, когато няма опасност от двусмислие, ще казваме само *краен автомат* вместо *детерминиран краен автомат без памет*.

Работата на крайния автомат A се описва по следния начин:

Нека $w = a_1 a_2 \dots a_s \in V^*$ е произволна дума над V .

По началното състояние q_0 и първия символ a_1 на w , чрез функцията на преходите δ се определя следващото състояние на автомата q_1 с равенството

$$q_1 = \delta(q_0, a_1).$$

(Ще предполагаме, че δ е изображение и следователно $D(\delta) = K \times V$.)

По текущото състояние q_t на $t + 1$ -ата стъпка, определяме следващото състояние $q_{t+1} = \delta(q_t, a_{t+1})$, за всяко t , такова, че $1 \leq t \leq s - 1$. След изчерпването на всички входни символи, достигаме до състоянието $q_s = \delta(q_{s-1}, a_s)$. Ако $q_s \in F$ казваме, че автоматът A *разпознава* думата w , а в противния случай, че w *не се разпознава* от A .

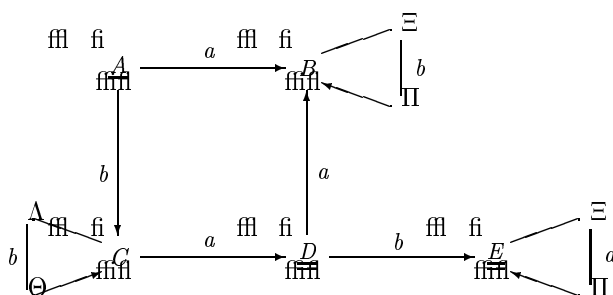
Пример 2.5.2 Нека A е автоматът

$$A = \langle \{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \delta, A, \{D, E\} \rangle.$$

Диаграмата на този автомат е представена от графа на Фиг. 2.5.1.

Функцията на прехода δ на автомата A е зададена таблично по следния начин.

състояние q	символ x	$\delta(q, x)$
A	a	B
A	b	C
B	a	D
B	b	B
C	a	D
C	b	C
D	b	E
E	a	E



Фиг. 2.5.2

По друг начин, функцията δ може да се зададе и с матрица на прехода A_δ . Нека елементите на V и K са номерирани по следния начин $V = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $K = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Тогава матрицата A_δ е с n реда и m стълба, като

$$A_\delta(i, j) = l \iff \delta(q_i, a_j) = q_l.$$

За нашия пример, да положим

$$A = q_1, B = q_2, C = q_3, D = q_4, E = q_5 \text{ и } a = a_1, b = a_2.$$

Товага матрицата A_δ е

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ * & 5 \\ 5 & * \end{pmatrix}.$$

Понеже функцията δ не е дефинирана навсякъде, то и матрицата A_δ има недефинирани елементи, в случая $A_\delta(4, 1)$ и $A_\delta(5, 2)$, тъй като $\delta(D, a)$ и $\delta(E, b)$ не са определени.

Функцията на прехода δ може да се определи върху по-широко дефиниционно множество, каквото е $K \times V^*$. Това може да стане, чрез следното индуктивно задаване

$$\delta'(q, \varepsilon) = q$$

$$\delta'(q, \omega) = \delta(\delta'(q, \alpha), a),$$

ако $\omega = \alpha a$, за $\alpha \in V^*$, $a \in V$.

От тази дефиниция се вижда, че върху $K \times V$ тази функция съвпада с δ и за означаването на δ' ще използваме символа δ .

Конкретно за разглеждания пример, може да пресметнем

$$\begin{aligned} \delta(A, aba) &= \delta(\delta(A, ab), a) = \delta(\delta(\delta(A, a), b), a) = \\ &= \delta(\delta(B, b), a) = \delta(B, a) = D. \end{aligned}$$

Определение 2.5.2 Нека A е детерминиран краен автомат. Множеството

$$L(A) = \{\omega \in V^* \mid \delta(q_0, \omega) \in F\}$$

се нарича **език**, **разпознаван от автомата** A .

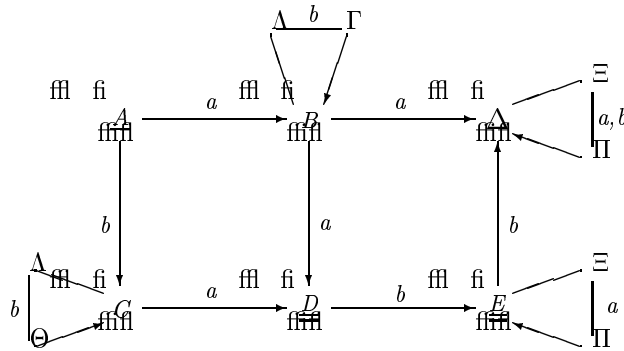
Не е трудно да се види, че $L(A)$ се състои от всички входни думи $\omega \in V^*$, с които автоматът A , започвайки своята работа от началното състояние q_0 достига до някое състояние от F .

Това, че за някои автомати (както и в горния пример) функцията на прехода не е дефинирана навсякъде в $K \times V$ (или в $K \times V^*$), може да се избегне, като се въведе ново състояние $\Delta \notin K$ и на всяка наредена двойка $(q, v) \in K \times V$, за която δ не е определена, положим $\delta(q, v) = \Delta$.

Такъв автомат, за който δ е изображение се нарича *напълно определен*.

Автоматът от Пример 2.5.2 сега изглежда, както на Фиг. 2.5.3.

Известни затруднения възникват от ограничението за детерминираност, т.е. изискването δ да е функция в $K \times V$. Това ограничение изключва възможността на диаграмата на автомата да има състояние, от което с един и същи входен символ, автоматът да достигне в повече от едно следващо състояние. За да избегнем това ограничение достигаем до понятието недетерминиран краен автомат. При него функцията на преход има за свои стойности множества от състояния. Следователно при него от едно състояние могат да излизат повече от една стрелка, които имат едно и също тегло (символ от входната азбука).



Фиг. 2.5.3

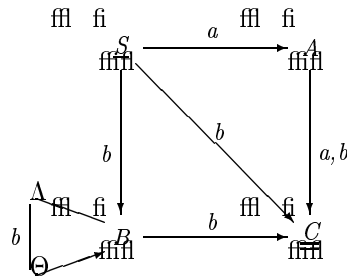
Определение 2.5.3 Недетерминиран краен автомат (НКА) е наредена петорка $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$, където функцията на прехода δ е изображение на $K \times V$ в множеството $P(K)$ от всички подмножества на K , а V, K, q_0 и F са дефинирани, както при детерминиран краен автомат.

Пример 2.5.3 Крайният автомат дефиниран със следната таб-

лица за функцията на преход δ

K	ω	$P(K)$
S	a	$\{A\}$
S	b	$\{B\}$
A	a	$\{A, C\}$
A	b	\emptyset
B	a	\emptyset
B	b	$\{B, C\}$
C	a	\emptyset
C	b	\emptyset

и множество от крайни състояния $F = \{C\}$ е недетерминиран краен автомат. Диаграмата му е показана на Фиг. 2.5.4.



Фиг. 2.5.4

Тук отново се налага да разширим дефиниционното множество на функцията δ , върху множеството $P(K) \times V^*$.

Да определим функцията δ' , чрез следното равенство

$$\delta'(K', a) = \bigcup_{q \in K'} \delta(q, a),$$

за всяко $K' \in P(K)$ и $a \in V$. Очевидно δ' съвпада с δ , когато $|K'| = 1$, т.е. върху множеството $K \times V$, ето защо можем вместо δ' да използваме означението δ .

Да разгледаме функцията δ'' , определена в $P(K) \times V^*$, чрез следните равенства

$\delta''(K', \varepsilon) = K'$,
 $\delta''(K', \omega) = \delta'(\delta''(K', \beta), a)$,
 за всяко $K' \in P(K)$ и $\omega = \beta a \in V^*$.

Тук също се вижда, че върху множеството $P(K) \times V$ функцията δ'' съвпада с δ' , а върху множеството $K \times V$ съвпада с δ и следователно за означаване на δ'' може да се използва δ , което ще прилагаме по-нататък.

За зададения НКА в Пример 2.5.3 получаваме

$$\begin{aligned}
 \delta(\{S, A\}, ab) &= \delta(\delta(\{S, A\}, a), b) = \\
 &= \delta(\{(\delta(S, a) \bigcup \delta(A, a))\}, b) = \delta(\{A\} \bigcup \{A, C\}, b) = \\
 &= \delta(\{A, C\}, b) = \delta(A, b) \bigcup \delta(C, b) = \emptyset \bigcup \emptyset = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Определение 2.5.4 Множеството от думи, които разпознава един недетерминиран краен автомат $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ се определя по следния начин

$$L(A) = \{\omega \in V^* \mid \delta(\{q_0\}, \omega) \cap F \neq \emptyset\}$$

и се нарича **език, разпознаван или породен от A** .

За автомата от Пример 2.5.3 думата $\omega = ab$ не се разпознава от него, тъй като $\delta(S, ab) = \delta(\delta(S, a), b) = \delta(A, b) = \emptyset$, докато думата $\omega = a^3 = aaa$ се разпознава, тъй като

$$\begin{aligned}
 \delta(S, aaa) &= \delta(\delta(S, a), aa) = \delta(A, aa) = \\
 &= \delta(\delta(A, a), a) = \delta(\{A, C\}, a) = \\
 &= \delta(A, a) \bigcup \delta(C, a) = \{A, C\} \bigcup \emptyset = \{A, C\},
 \end{aligned}$$

и $\{A, C\} \cap F = \{c\} \neq \emptyset$. Следователно ab не принадлежи на езика, разпознаван от този автомат, а думата a^3 е от него.

Определение 2.5.5 Два крайни автомата A_1 и A_2 ще наричаме **еквивалентни**, ако $L(A_1) = L(A_2)$.

Теорема 2.5.1 *Формалният език L над азбуката V се разпознава от детерминиран краен автомат точно тогава, когато може да се разпознае от някой недетерминиран краен автомат.*

Доказателство: Да отбележим, че за всеки ДКА съществува еквивалентен на него ДКА с функция на преход, която е изображение на $K \times V$ в K . Нека $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е ДКА, като δ е изображение и $L(A) \subset V^*$. Да разгледаме НКА

$$A' = \langle K, V, \delta', q_0, F \rangle,$$

за който

$$\delta'(q, a) = \{\delta(q, a)\}.$$

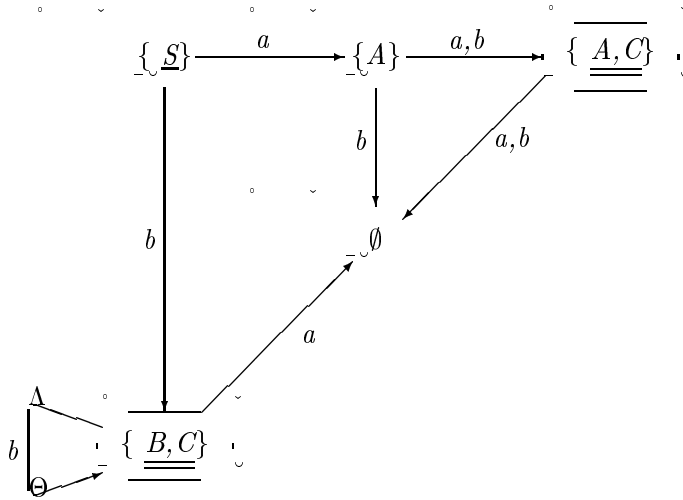
Очевидно $L(A) = L(A')$.

Нека сега $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е произволен НКА да определим ДКА, чрез равенството $A' = \langle K', V, \delta', q'_0, F' \rangle$, за който да докажем, че $L(A) = L(A')$. Това може да стане, като изберем $K' = P(K)$ и $q'_0 = \{q_0\}$. Функцията на преход δ' на A' дефинираме $\delta' : P(K) \times V \rightarrow P(K)$, така че да е разширение на δ , т.е. върху $K \times V$ да съвпада с δ , като отъждествяваме едноелементните множества с единствения техен елемент, т.е.

$$\delta'(M, a) = \bigcup_{q \in M} \delta(q, a), \text{ за всяко } M \subset K.$$

Тогава $L(A') = \{\omega \in V^* \mid \delta'(\{q_0\}, \omega) \cap F \neq \emptyset\}$.

Доказателството на равенството $L(A) = L(A')$ предоставяме за самостоятелно упражнение. \square



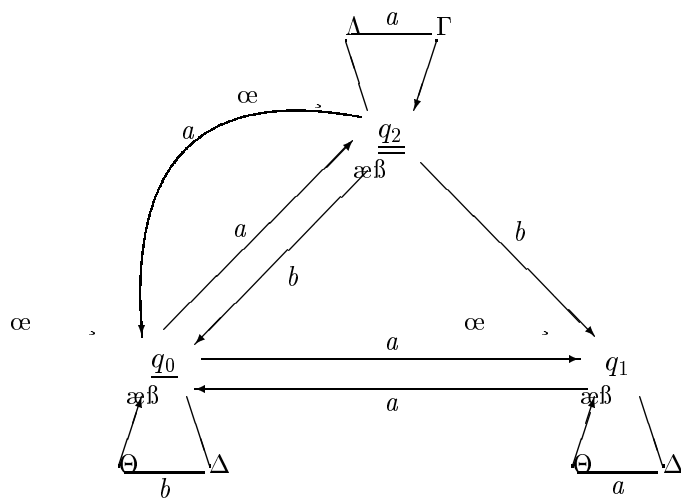
Фиг. 2.5.5

Практически задачата за построяване на ДКА, еквивалентен на някои НКА се среща много често и може да се реши с използването на по-малко на брой състояния, отколкото са елементите на $P(K)$, т.е. по-малко от $2^{|K|}$. Достатъчно е отначало да разгледаме само състоянията $\delta(\{q_0\}, a)$, за всяко $a \in V$, а след това към K' да добавим и всички състояния $\delta(M, a)$ за всяко $a \in V$ и $M \subset K$. Това добавяне продължава, докато получените по този начин състояния започнат да се повтарят с вече съществуващите.

За НКА от Пример 2.5.3, получаваме еквивалентния му ДКА представен на Фиг. 2.5.5.

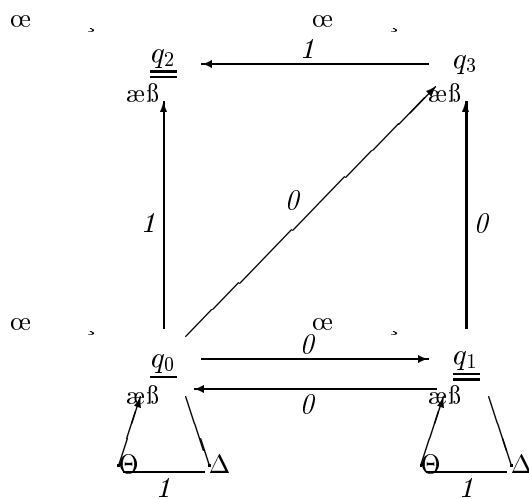
З а д а ч и

1. Нека L е език над азбуката $V = \{0, 1\}$, състоящ се от думи, в които след 0 винаги стои 1. Да се построи ДКА, които разпознава L и граматиката Γ , която го поражда.
2. Нека $A = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_2\} \rangle$ е НКА, който е представен на Фиг. 2.5.6. Да се построи ДКА, еквивалентен на A .



ФИГ. 2.5.6

3. Да се построи ДКА, еквивалентен на НКА представен на Фиг. 2.5.7.



Фиг. 2.5.7