

2.7 Минимизация на крайни автомати

При разглеждане на детерминиран краен автомат от чисто практически съображения, е изгодно такъв автомат да има минимален брой състояния. Освен останалите предимства, такъв минимален ДКА има и най-компактно графично представяне, тъй като неговия граф има най-малко върхове в сравнение с графите на всички автомати, разпознаващи един и същи език. В този параграф ще покажем как се построява минимален ДКА, който разпознава даден автоматен език.

В Глава 1 въведохме отношения (релации) на еквивалентност в дадено множество A . Тази еквивалентност разбива множеството A на непресичащи се класове на еквивалентност. Да приемем, че класът, който съдържа елемента a , $a \in A$ е означен с \bar{a} . Тогава множеството $\bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$ е *фактор множество* на A при зададената еквивалентност. Ако означим с ρ тази еквивалентност, то с $\text{ind}(\rho)$ ще означаваме числото $|\bar{A}|$ и ще го наричаме индекс на ρ .

Да разгледаме сега някои еквивалентности в моноида V^* от всички думи над дадена азбука V .

Определение 2.7.1 *Релацията на еквивалентност ρ в V^* се нарича десен инвариант, ако от $\omega_1 \rho \omega_2$ следва, че $\omega_1 z \rho \omega_2 z$ за всяка дума z от V^* .*

Нека L е произволен език над азбуката V . Да определим във V^* следната еквивалентност ρ_L , породена от езика L ,

$\omega_1 \rho_L \omega_2$, ако за всяко $z \in V^*$ думата $\omega_1 z$ е от L ,
точно тогава, когато $\omega_2 z \in L$.

Очевидно ρ_L е еквивалентност.

Нека сега $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е ДКА, който е напълно определен. Да определим още една еквивалентност ρ_A в V^* , дефинирана по следния начин

$$\omega_1 \rho_A \omega_2 \text{ точно тогава, когато } \delta(q_0, \omega_1) = \delta(q_0, \omega_2).$$

В същност две думи от V^* са ρ_A -еквивалентни, ако на тях съответствуват пътищата с един и същи край от графа на ав-

томата A , т.е. ако те привеждат автомата в едно и също състояние, започвайки работата си върху тях от началното състояние. Очевидно ρ_A е еквивалентност. Лесно се съобразява, че $\text{ind}(\rho) \leq |K|$.

Теорема 2.7.1 *За всеки автоматен език $L = L(A)$ съществува единствен минимален ДКА, който разпознава L .*

Доказателство: От дефинициите на ρ_L и ρ_A следва, че те са десени инварианти, за всяко L и A .

Нека $\omega_1 \rho_A \omega_2$. Ще покажем, че $\omega_1 \rho_L \omega_2$. Наистина за всяко $z \in V^*$ имаме

$$\begin{aligned} \omega_1 z \rho_A \omega_2 z &\Rightarrow \delta(q_0, \omega_1 z) = \delta(q_0, \omega_2 z) \Rightarrow \delta(q_0, \omega_1 z) \in F \iff \\ &\iff \delta(q_0, \omega_2 z) \in F \Rightarrow \omega_1 z \in L \iff \omega_2 z \in L \Rightarrow \omega_1 \rho_L \omega_2. \end{aligned}$$

От тези съотношения следва, че ако ω_1 и ω_2 са в един и същи клас на ρ_A -еквивалентност, то те са и в един и същи клас на ρ_L -еквивалентност. Следователно всеки клас на ρ_A -еквивалентност е подмножество на някой клас на ρ_L -еквивалентност. Следователно

$$\text{ind}(\rho_L) \leq \text{ind}(\rho_A) \leq |K|.$$

От казаното следва, че на всеки клас $\bar{\omega}$ на ρ_L -еквивалентност може да се съпостави еднозначно някое подмножество \bar{q}_ω на K . Това множество се състои от всички състояния q_i на A , за които съществуват думи $\omega_i \in \bar{\omega}$ така, че $\delta(q_0, \omega_i) = q_i$. Очевидно, ако $q_i, q_j \in \bar{q}_\omega$, то за всяко $z \in V^*$ ще е в сила

$$\delta(q_i, z) \in F \iff \delta(q_j, z) \in F.$$

Такива две състояния q_i и q_j се наричат *неразличими*. Тези разсъждения водят до извода, че всеки ДКА, който разпознава езика L не може да има по-малко състояния от колкото са класовете на ρ_L -еквивалентност, т.е. $|K| \geq \text{ind}(\rho_L)$. Също така, ако $A_1 = \langle K_1, V, \delta_1, q_0^1, F_1 \rangle$ и $A_2 = \langle K_2, V, \delta_2, q_0^2, F_2 \rangle$ са два автомата, разпознаващи езика L и $|K_1| = |K_2| = \text{ind}(\rho_L)$, то на всеки

клас на ρ_L -еквивалентност, съответствуват едноелементни множества от състояние в K_1 и K_2 . Следователно между K_1 и K_2 съществува взаимно-еднозначно изображение θ така, че за всяко $q_i^1 \in K_1$ и всяко $a \in V$ е в сила

$$\theta(\delta_1(q_i^{(1)}, a)) = \delta_2(\theta(q_i^{(1)}), a).$$

Това доказва, че ако съществува минимален ДКА, разпознаващ език L , то той е единствен.

Съществуването на минимален ДКА, разпознаващ езика L се установява, като разгледаме следния автомат

$$A_L = \langle \overline{K}, V, \delta, q_0, F \rangle,$$

където $\overline{K} = \{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \dots, \overline{\omega}_n\}$ е множеството от различните класове на ρ_L -еквивалентност, $\overline{q}_0 = \overline{\varepsilon}$, $F = \{\overline{\omega}_i \mid \omega_i \in L\}$ и функцията на прехода δ се дефинира от равенството

$$\delta(\overline{\omega}_i, a) = \overline{\omega_i a}$$

за $i = 1, 2, \dots, n$ и $a \in V$.

Поради

$$\omega \in L(A_L) \iff \delta(\overline{\varepsilon}, \omega) = \overline{\omega} \in F \iff \omega \in L$$

следва, че A_L разпознава езика L . □.

Практическо значение има задачата за намиране на минимален ДКА, който да е еквивалентен на даден автомат. За решаването ѝ ще използваме току що доказаната теорема.

Нека $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е напълно определен ДКА, който разпознава езика $L = L(A)$. За получаването на минимален автомат A_L , еквивалентен на A , е необходимо да разбием множеството K на класове от неразличими състояние и тези класове ще са състоянията на автомата A_L . Тази процедура може да се извърши по няколко начина. Един от тях е като последователно отделяме тези състояния, които не могат да са в един и същи клас. Такива състояния често се наричат *различими*.

Да въведем в K релациите ρ_0, ρ_1, \dots по следния начин

- (i) $q_i \rho_0 q_j$ точно тогава, когато $|\{q_i, q_j\} \cap F| = 1$;
- (ii) $q_i \rho_t q_j$ точно тогава, когато съществува $a \in V$, така, че $\delta(q_i, a) \rho_{t-1} \delta(q_j, a)$.

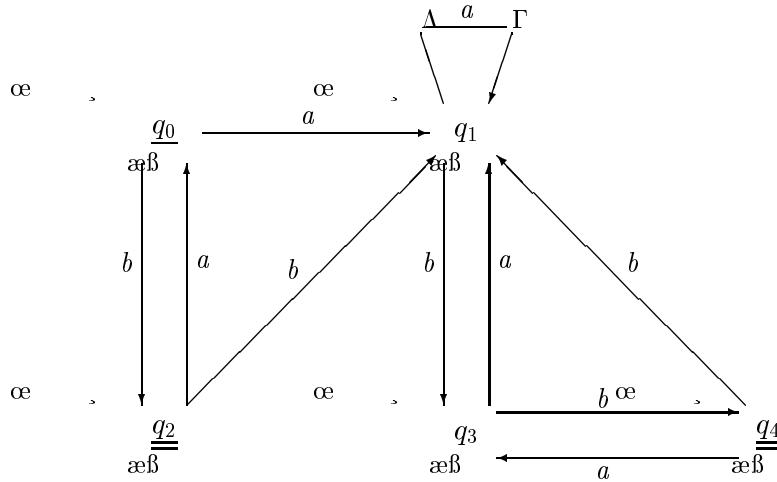
Две състояния q_i и q_j са в релацията ρ_t , ако съществува дума $\omega \in V^*$, за която $|\omega| \leq t$ и $|\{\delta(q_i, \omega), \delta(q_j, \omega)\} \cap F| = 1$, т.е. ω привежда двете състояния q_i и q_j в нови състояния, от които едното е в F , а другото извън F .

Ако гледаме на релациите ρ_i като на подмножества на $K \times K$, то очевидно

$$\rho_0 \subset \rho_1 \subset \dots \subset \rho_t \subset \dots$$

Понеже $K \times K$ е крайно множество ще следва, че съществува най-малко естествено число r така, че $\rho_r = \rho_{r+1}$. Достигането на това число r всъщност и завършва с построяването на автомата A_L . Може да се докаже, че $r < (|K|^2 - |K|)/2$.

Пример 2.7.1 Ще илюстрираме описания алгоритъм със задачата за минимизиране на ДКА, представен на Фиг. 2.7.1.



Фиг. 2.7.1

Релациите ρ_k можем да представим, чрез булеви матрици с елементи $t(true)$ и $f(false)$, като елементът a_{ij} е t , точно тогава, когато $q_i \rho_k q_j$. Понеже релациите ρ_k са симетрични, е достатъчно да получим съответната матрица на ρ_k само над главния диагонал, а тъй като $q_i \rho_k q_i$ не е вярно следва, че не е необходимо да се търсят и елементите a_{ii} , тъй като те имат стойност f . Ето как изглеждат матриците на ρ_0, ρ_1 , и ρ_2 за разглеждания пример.

$$M_0 = \begin{pmatrix} \bullet & f & t & f & t \\ & \bullet & t & f & t \\ & & \bullet & t & f \\ & & & \bullet & t \\ & & & & \bullet \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \bullet & t & t & f & t \\ & \bullet & t & t & t \\ & & \bullet & t & f \\ & & & \bullet & t \\ & & & & \bullet \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \bullet & t & t & f & t \\ & \bullet & t & t & t \\ & & \bullet & t & f \\ & & & \bullet & t \\ & & & & \bullet \end{pmatrix}.$$

Например в $M_0, a_{01} = f$, защото q_0 и q_1 едновременно не са крайни състояния на автомата. Аналогично a_{03}, a_{13}, a_{24} имат стойност f . Да отбележим, че M_1 се получава, като в M_0 се запазят елементите със стойност t , а се пресмятат само тези, които в M_0 са били f . Така в M_1 за a_{13} получаваме t , тъй като $\delta(q_1, b) = q_3$ не е крайно състояние, а $\delta(q_3, b) = q_4$ е крайно състояние, т.е. $q_1 \rho_1 q_3$.

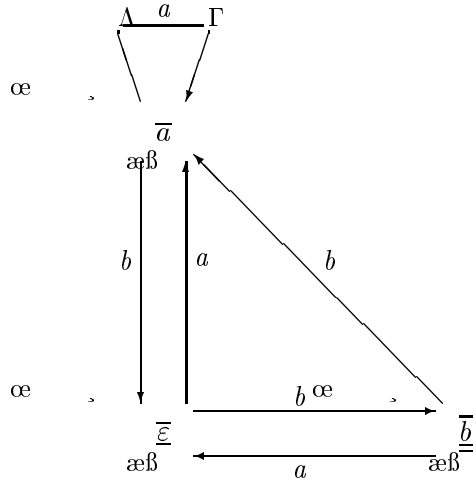
Аналогично M_2 се получава от M_1 , като се пресмятат само съответните елементи от M_1 , които имат стойност f . Така a_{03} в M_2 остава f , тъй като

$$\begin{aligned} \delta(q_0, aa) &= q_1 \notin F, & \delta(q_0, ab) &= q_3 \notin F, & \delta(q_0, ba) &= q_0 \notin F, \\ \delta(q_3, aa) &= q_1 \notin F, & \delta(q_3, ab) &= q_3 \notin F, & \delta(q_3, ba) &= q_3 \notin F \end{aligned}$$

и

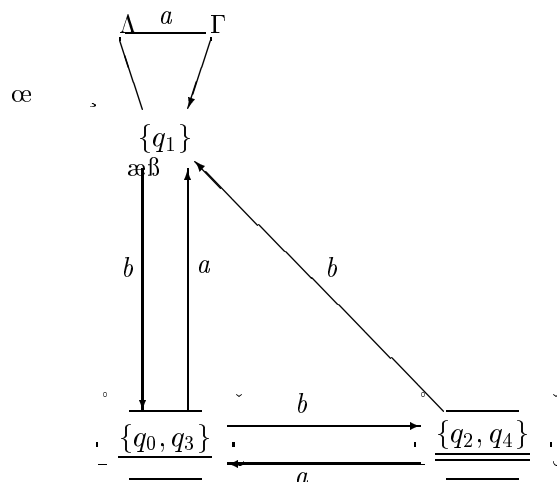
$$\delta(q_0, bb) = q_1 \notin F, \quad \delta(q_3, bb) = q_1 \notin F.$$

По същия начин се убеждаваме, че $a_{24} = f$. Следователно $\rho_1 = \rho_2$. Сега можем да построим минимален ДКА, който е еквивалентен на A . Неговият граф е представен на Фиг. 2.7.2.



Фиг. 2.7.2

Тъй като на класовете $\bar{\epsilon}$, \bar{a} и \bar{b} съответствуват следните множества от състояния на A : $\{q_0, q_3\}$, $\{q_1\}$ и $\{q_2, q_4\}$, то минималният ДКА еквивалентен на A се представя, чрез графа на Фиг. 2.7.3.



Фиг. 2.7.3

З а д а ч и

1. Нека A е ДКА и $L = L(A)$ е езикът, разпознаван от A и нека $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ са два класа на ρ_L -еквивалентност при релацията ρ_L . Да се докаже, че ако $\delta(q_0, \omega_1) = q_1$ и $\delta(q_0, \omega_2) = q_2$, то $\omega_1 \rho_L \omega_2$ точно тогава, когато q_1 и q_2 са неразличими състояния на A .
2. Нека $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Да се опишат класовете на ρ_L -еквивалентност и да се докаже, че L не е автоматен език.